線型解析 I 要綱 #3

2003–4–24　　河野

1.3　1 次独立と基底

定義 1.5 何個かのベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：任意のスカラー $c_1, \ldots, c_n$ に対し

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_n = 0$

係数がすべて 0 のときはいつでも 1 次結合のベクトルが 0 になる。この定義はそれの逆が成立する事を主張するものである。

$n = 1, 2, 3, 4$ の場合 1 次独立が何を意味しているか具体的にみよう。

最初は $n = 1$ の場合：$\boldsymbol{v}_1$ に対し $c_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ から $c_1 = 0$ が出てくるための必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ である。即ち 1 個のベクトル $\boldsymbol{v}$ が 1 次独立である必要十分条件は $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である。

次に $n = 2$ の場合：$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ から $c_1 = c_2 = 0$ が出てくるためには，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{0}$ と異なり，2 つのベクトルが並行でない事が必要十分である。この事は否定命題の方が分かりやすいかもしれない。今 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ が成立しているとする。$c_1 \neq 0$ のときは $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2$ と書ける。$c_2 \neq 0$ のときは $\boldsymbol{v}_2 = -\dfrac{c_1}{c_2}\boldsymbol{v}_1$ と書ける。いずれの場合も一方のベクトルは他方のベクトルの実数倍になっている。

$n = 3$ の場合：$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は 3 つのベクトルが平行 6 面体の 3 辺になっている事である。1 次独立を否定すると，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ かつ $c_1 = 0$ または $c_2 = 0, c_3 = 0$ が成立する。$c_3 \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_3 = -\dfrac{c_1}{c_3}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{c_2}{c_3}\boldsymbol{v}_2$ と表す事ができる。このとき $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が張る平面上に存在する。$c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ の場合も同様にできる。

$n = 4$ の場合：後で示すが，3 次元ベクトルに対しては，$n \geqq 4$ の場合はいつでも 1 次独立ではない。それならば一般的な定義をしなくてもいいのではないかと思う人もいるかもしれない。我々が今取り扱っている 3 次元のベクトルの場合は上記の様になるが，一般のベクトルに対してもこの定義は一般化され，その場合は上記の事は成立しない。

命題 1.6 ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ について次の 2 つは同値。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ は 1 次独立である。

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であり，$\boldsymbol{v}_{n+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が成立する。

証明　(1)⇒(2)　定義より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立なのは明らか。もし $\boldsymbol{v}_{n+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とすると，実数 $a_1, \ldots, a_n$ が存在して $\boldsymbol{v}_{n+1} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ となるが，これは

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n + (-1)\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{0}$$

となり，1 次独立性に矛盾。

(2)⇒(1)　1 次独立でないとするとどれかは 0 でない実数 $a_1, \ldots, a_n, a$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n + a\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

が成立する。ここで $a = 0$ とすると $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性に反するので $a \neq 0$。よって移行して

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \left(-\frac{a_1}{a}\right)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_n}{a}\right)\boldsymbol{v}_n$$

が得られ，$\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となり矛盾。∎

命題 1.6 より次が分かる。

命題 1.7

(1) $\boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\mathbf{0}\} \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ である。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\mathbf{0}\} \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ である。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立である必要十分条件は $\{\mathbf{0}\} \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ である。

演習問題 1.5　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ただし a, b は各自の出席番号の下 2 桁と 1 桁。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする。即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。任意の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，実数 x_1, x_2, x_3 が唯 1 組存在して $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と表す事ができる。この様な性質を持つベクトルの組は基本ベクトルに限らない (演習問題 1.6 参照)。ここでは部分空間に関してその様なベクトルの組を考える。

定義 1.8 部分空間 W に対し次の様な性質をもつ W のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する時これを W の**基底** (*base*) と呼ぶ。つまり，

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in W$ に対し実数 $a_1, \ldots, a_n$ が存在して

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

と書き表せる。

(2) この書き表し方は一意的，つまり 2 通りの表示

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

$$\boldsymbol{a} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

があれば $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ が成立する。

定義の 2 番目の条件は 1 次独立と関係している。即ち次が成立する。

命題 1.9 ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ について次の 2 つは同値。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し 2 通りの表示

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

$$\boldsymbol{a} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

があれば $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$。

(2) スカラー $c_1, \ldots, c_n$ に対し

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_n = 0$。

証明 (1)⇒(2) $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n$ という表示はいつでもあるので $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$。よって OK。

(2)⇒(1) 2 通りの表示

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

$$\boldsymbol{a} = b_1\boldsymbol{v}_1 \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

に対し最初の式から次の式を引くと

$$\boldsymbol{0} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v}_n$$

よって $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$ より OK。 ∎

命題 1.10 部分空間 W の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ について，基底であるための必要十分は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であり，W を生成すること，即ち $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ である。

この命題を定義 1.8 の代わりに定義に採用する事ができる。実際これを定義に採用している本も多い (参考書もこの立場)。

演習問題 1.6　次のベクトルの組が W の基底である事を示せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W = \boldsymbol{R}^3$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, W = \boldsymbol{R}^3$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0, x - 2y + z = 0 \right\}$

命題 1.6，命題 1.9 により $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が W の基底であるとは極大な—つまり他の W のベクトルを加えると 1 次独立でなくなる様な— 1 次独立なベクトルの集合である事が分る。つまり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が W の基底である必要十分条件は次の 2 つが成立する事である。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事。つまりスカラー $a_1, \ldots, a_n$ に対し

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立する。

(2) 極大である。つまり，任意の W のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

は 1 次独立でない。

これは基底を見つける方法を与える。W を部分空間とする。

$W = \{\mathbf{0}\}$ の場合は特別である。基底が存在しないとも考えられるが，例外があるのはいやなので空集合が基底と考える事にしよう。

$W \neq \{\mathbf{0}\}$ の場合は $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を持ってくる。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = W$ ならこの様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1$ が基底になる。$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq W$ のとき，1 次独立なものが存在するので，それを $\boldsymbol{v}_2$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = W$ のとき，この様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が基底にな

る。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ のとき1次独立なものがするので，それを $\boldsymbol{v}_3$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が1次独立なものを捜す。あとで一般的な枠組みで示すが，ここでは $\boldsymbol{R}^3$ の4個以上のベクトルの組は1次独立でない事を証明抜きで認めておこう。

以上から $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W は

(1) $W = \{\boldsymbol{0}\}$

(2) $W = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$

(3) $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$

(4) $W = \boldsymbol{R}^3$

の4つのタイプがある事が分かる。

そこで部分空間の'次元'を基底の個数で定義する。つまり(1)の場合 W は0次元，(2)の場合 W は1次元，(3)の場合 W は2次元，(4)の場合 W は3次元，と定義する。W 次元を $\dim W$ と表す。[1]

演習問題 1.7　次の部分空間の基底を1組求め，次元を求めよ。

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + 5y + z = 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(3) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0 \right\}$

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0, x + y + z = 0 \right\}$

---

[1] 厳密に言うと基底の個数が基底の選び方によらず一定である事を言わなければ厳密な定義にはならない。つまり次元を定義するためには次の事実が必要になる。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ を W の2つの基底とすると $m = n$ である。

この事実は後で一般的な状況で証明する。