2003–5–15 河野

1.4 3 次行列

一般に実数を縦に m 行横に n 列長方形に並べたものを $m \times n$ 行列または (m, n) 行列という。表すときは 2 重添え字を使って次の様に書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

つまり i 行 j 列の実数 (これを (i, j) 成分という) を a_{ij} で表す。

この章では 3×3 行列 (3 次行列) のみ扱う (時々2 次行列も扱うかもしれない)。3 次行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。**以下この章では特に断らない限り，行列といったら 3 次行列を表すものとする。**

2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対しその和 $A + B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数倍は

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。また積は $AB = (c_{ij})$ とおくとき，

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

と定義する。行列の積は全体を通じて基本的であるが，積を何故この様に定義するかはおいおい理解されるであろう。

3 次元ベクトルを $(3, 1)$ 行列と考えることができる。このとき $(3, 3)$ 行列との積が定義できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

行列の和・積は実数の和・積と比べたとき，似ている性質もあるし異なる性質もある。

共通な性質として次があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (零行列と呼ばれる)，E は単位行列と呼ばれる次の行列とする。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下零行列 O と単位行列 E は特に断らずに用いる場合も多い。

命題 1.11
(1) 任意の A, B, C に対し $(A+B)+C = A+(B+C)$
(2) 任意の A, B に対し $A+B = B+A$
(3) 任意の A に対し $A+O = A$
(4) 任意の A, B, C に対し $(AB)C = A(BC)$
(5) 任意の A に対し $AE = EA = A$
(6) 任意の A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$
(7) 任意の A, B, C に対し $(A+B)C = AC+BC$

演習問題 1.8　命題 1.11 を示せ。
演習問題 1.9　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB = BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。
演習問題 1.10　次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a, b は自分の在籍番号の下 2 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 2 乗と 3 乗

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような行列 $A = (a_{ij})$ に対し A^3

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義する。このとき $E = (\delta_{ij})$ となる。3 次行列の場合はあまり意味がないようにみえるが，一般に n 次行列を考えるときこの記号は役に立つ。

2 つの行列 A, B に対し $AB = BA$ が成立するとき，A と B は**可換** (*commutative*) であるという。αE の形をしている行列をスカラー行列という。スカラー行列は任意の行列と可換であるが，逆に任意の行列と可換な行列はスカラー行列に限る。

演習問題 $^{(*)}$**1.11**　上の事実を証明せよ ((*) がついている問題は少し難しいかも)。

3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，この行列を “対角線” で折り返してできる行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を A の**転置行列** (*transpose*) といい ${}^tA$ と表す。成分で表すと，$A = (a_{ij})$ とする。$a'_{ij} = a_{ji}$ とおくとき，(i, j) 成分が a'_{ij} である行列 (a'_{ij}) を ${}^tA$ で表す。転置行列に対し次が成立する。

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \qquad {}^{tt}A = A$$

演習問題 1.12　上記の事を証明せよ。

積に関しては次が成立する。積の順序が逆になっている事に注意。

命題 1.12 行列 A, B に対し ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

証明　AB の (i, j) 成分 c_{ij} は

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{j3}$$

であった。よって ${}^t(AB)$ の (i, j) 成分は c_{ji} である。

また ${}^tA$, ${}^tB$ の (i, j) 成分をそれぞれ a'_{ij}, b'_{ij} とすると，$a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ である。${}^tB{}^tA$ の (i, j) 成分 d_{ij} は

$$d_{ij} = b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + b'_{i3}a'_{3j}$$

なので，$d_{ij} = c_{ji}$ が分かる。

演習問題 1.13　行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，即ち $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，任意の i, j について $a_{ij} = a_{ji}$ が成立するとき，A を**対称行列** (*symmetric matrix*) という。また ${}^tA = -A$ が成立するとき，つまり任意の i, j について $a_{ij} = -a_{ji}$ が成立するとき**交代行列** (*alternating matirx*) という。このとき次を示せ。

(1) $A_s = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $A_a = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおくとき，A_s は対称行列，A_a は交代である。

(2) $A = B + C$ と表されて，B が対称，C が交代行列のとき，$B = A_s$, $C = A_a$ が成立する。

演習問題 1.14　対称行列 A, B に対し A と B が可換である事と AB が対称行列という事は同値である事を示せ。

また A, B が交代行列のときはどうなっているか調べよ。

行列 A に対し

$$AX = E \qquad XA = E$$

となる行列 X が存在するとき，A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*non–singular*) であるという。

命題 1.13 A が正則のとき上のような X は一意的である。即ち，Y が $AY = E, YA = E$ を満たせば，$X = Y$ である。

よってこの様な行列 $X(= Y)$ を A の**逆行列** (*inverse matrix*) といい，A^{-1} で表す。

証明　$Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X$。

命題 1.14 A,B が正則な行列のとき，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 1.15　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

演習問題 1.16　A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示せ。

A が正則である条件はもう少し弱める事ができる; 行列 A に対し $AB = E$ となる行列が存在するとき，A が正則である事を示す事ができる。しかしこれを直接の計算で示す事は簡単ではない。後でもう少し一般的な枠組みの中で証明するが，ここでは 2 次行列について成立する事を計算で見ておこう。

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad - bc$ というものを**行列式** (*determinant*) と呼び，$D(A)$ で表す。行列式そのものは一般の n 次行列で定義できるが，ここでは 2 次行列のそれに関してのみ議論する。

命題 1.15 2 次行列 A, B に対し $D(AB) = D(A)D(B)$ が成立する。

命題 1.15 より $AB = E$ となる 2 次行列が存在するとき $D(A) \neq 0$ が (同様に $D(B) \neq 0$ が) 分かる。

定理 1.16 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則である必要十分条件は，$D(A) \neq 0$ であり，このとき逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

証明　最初に $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が存在して，$AB = E$ を満たすとする。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立する。このとき $pD(A) = d, qD(A) = -b, rD(A) = -c, sD(A) = a$ が分かる。

さて A が正則のとき A の逆行列 B は $AB = E$ を満たす。このとき命題 1.15 の後の注意より $D(A) \neq 0$ が分かる。

逆に $D(A) \neq 0$ のとき，$p = \dfrac{d}{D(A)}, q = -\dfrac{b}{D(A)}, r = -\dfrac{c}{D(A)}, r = \dfrac{a}{D(A)}$ とおき，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = E, BA = E$ が分かり $B = A^{-1}$ が分かる。 ■

この証明を見ると $AB = E$ という条件から $BA = E$ が従う事が分かる。