線型解析 I 要綱 #5　　2002–5–29　　河野

1.5　線型写像

定義 1.17 U, V を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。U から V への写像 f **線型写像** (linear map) であるとは次の 2 つの条件を満たす事である。
(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の実数 α に対し $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する。

命題 1.18 $f : U \to V$ を線形写像とする。このとき $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，$f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ が成立する。

証明　$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0})$ が成立する。f が線型写像という事から $f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0})$ なので，$f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0})$ の両辺から $f(\boldsymbol{0})$ を引くと $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を得る。

$(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ 及び $(-1)f(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ が成立しているので，$f(-\boldsymbol{x}) = f((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)f(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる。 ■

例 1.19 空間のベクトルは少し複雑なので，最初に平面のベクトルに関して見よう。平面のベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^2$ とする。$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 f が次の 2 つを満たすとき線型写像と言うのは空間のベクトルの場合と全く同じである。
(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ と任意の実数 α に対し $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する。

各ベクトルを位置ベクトルと考えて，原点中心に θ 回転させる写像を f とする。このとき f が条件を満たす事が分かるので，f は線型写像になる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ とするとき，関係式を具体的に求めてみよう。

$\boldsymbol{x}$ が x 軸となす角を α とし，$|\boldsymbol{x}| = L$ とすると，$x_1 = L\cos\alpha, x_2 = L\sin\alpha$ である。また $y_1 = L\cos(\theta+\alpha), y_2 = L\sin(\theta+\alpha)$ となるので，加法定理より $y_1 = L\cos\theta\cos\alpha - L\sin\theta\sin\alpha$, $y_2 = L\sin\theta\cos\alpha + L\cos\theta\sin\alpha$ となり，$y_1 = \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2$, $y_2 = \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2$ となる。行列で表すと，$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる。

次に直線 $y = \alpha x$ に関する折り返しで決まる写像を g とする。この g が線型写像になるのは f と同様に確かめられる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ とするとき，関係式を具体的に求めてみよう。ベクトルを位置ベクトルと考えるとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が表す点を P，ベクトル $\boldsymbol{y}$ が表す点を Q とする。線分 $\overline{PQ}$ の中点は $y = \alpha x$ を通るので，$(x_2 + y_2) = \alpha(x_1 + x_2)$ が成立する。線分 $\overline{PQ}$ と直線 $y = \alpha x$ は直交するので，$\dfrac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}\alpha = -1$ が成立する。これを解くと $y_1 = \dfrac{\frac{1}{\alpha} - \alpha}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} x_1 + \dfrac{2}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} x_2$, $y_2 = \dfrac{2}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} x_1 + \dfrac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} x_1$ となる。直線 $y = \alpha x$ が x 軸となす角を θ とおくと，$\alpha = \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので代入すると $y_1 = \cos(2\theta)x_1 + \sin(2\theta)x_2$,

$y_2 = \sin(2\theta)x_1 - \cos(2\theta)x_2$ を得る。行列で表すと $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる。[(1)]

線型写像は長さを変えないものに限るわけではない。例えば x 方向は 2 倍，y 方向は 3 倍する様な写像，式で書くと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

も線型写像であるし，x 軸への正射影，式で書くと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

も線型写像である。

命題 1.20 $f : U \to V$ を線形写像とする。$\mathrm{Ker}(f) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \mid \ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid \ \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U \,\}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(f)$，$\mathrm{Im}(f)$ は部分空間である。$\mathrm{Ker}(f)$ を線型写像 f の**核** (*kernel*)，$\mathrm{Im}(f)$ を線型写像 f の**像** (*image*) という。

証明 W が部分空間であるためには W が，(1) 空集合でない，(2) W のベクトルの和がまた W に含まれる，(3) W のベクトルの任意の実数倍がまた W に含まれる，の 3 つの性質を持てばよかった。それぞれについてチェックすればよい。

まず最初に $\mathrm{Ker}(f)$ について：(1) $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を $\mathrm{Ker}(f)$ の任意のベクトルとすると，$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が成立している。このとき $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ が分かる。(3) $\boldsymbol{u}$ を $\ker(f)$ の任意のベクトル，α を任意の実数とする。$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ より，$f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり，$\alpha\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ が分かる。

次に $\mathrm{Im}(f)$ について：(1) $\boldsymbol{0} \in U$ なので $f(\boldsymbol{0}) \in \mathrm{Im}(f)$ であるが，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(f)$ である。(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を $\mathrm{Im}(f)$ の任意のベクトルとする。定義より U のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が存在して，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{v})$ となる。$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in U$ であり，$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ となるので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ となる。(3) $\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Im}(f)$ の任意のベクトル，α を任意の実数とする。ある U のベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在して $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{u})$ となる。このとき $f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{x}$ となるので，$\alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$ となる。 ∎

例 1.21 行列 A に対し $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_A を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき行列に関する分配法則から $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$ が成立する。また $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x}$ も成立するので，f_A は線型写像になる。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。この f_A に対し $\mathrm{Ker}(f_A)$ と $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めてみよう。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即ち $y + 2z = 0$, $x + 2y + 3z = 0$, $2x + 3y + 4z = 0$ が成立しなければならない。この式達より $x - z = 0$, $x + y + z = 0$ を得る。逆にこの条件のとき $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ となる。

[(1)] 平面から平面への写像で，原点を固定し，ベクトルの長さを変えない写像はこの 2 つに限られる事が知られている。興味のあるものは証明を試みてみよ。

$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f_A)$ のとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在して $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける。

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので,

$$A\boldsymbol{x} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (x-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (y+2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $\boldsymbol{y} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の元に対し $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$ と置くと $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x})$ なので, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f_A)$ である。

よって

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - z = 0, x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{y} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, p, q \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。$\mathrm{Ker}(f_A)$ を生成元を用いて書き表す事もできる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\mathrm{Ker}(f_A)$ の任意の元とする。このとき $z = x, y = -x - z = -2x$ なので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。

演習問題 1.17　次の行列で表現される線型写像 f_A に対し $\mathrm{Ker}(f_A)$ 及び $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

演習問題 1.18　U, V, W を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とすると, 合成写像 $g \circ f$ も線型写像であることを示せ。

$f : U \to V$ が上への 1 対 1 写像であるとき，逆写像 f^{-1} も線型写像である事を示せ。

命題 1.22 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を線形写像とする。このとき 3 次行列 A が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ が成立する。この行列 A を線型写像 f の表現行列という。

$f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を線形写像とする。A を f の，B を g の表現行列とする。このとき BA は $g \circ f$ の表現行列である。

証明 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする，即ち $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_2)$, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_3)$ とおき，$A = (a_{ij})$ とおく。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立する事を示す。$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ と表す事ができるので，$f(\boldsymbol{x}) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) + f(z\boldsymbol{e}_3) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) + zf(\boldsymbol{e}_3) = x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となる。

f の表現行列を A とすると任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立する。g の表現行列を B とすると任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立する。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $(BA)\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = g(A\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = (g \circ f)(\boldsymbol{x})$ となる。 ∎

例 1.23 写像 f を z 軸に関する θ 回転とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が張る平行 4 辺形の対角線で与えられるベクトルが $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ である。この平行 4 辺形を θ 回転させて得られる平行 4 辺形は $f(\boldsymbol{u})$ と $f(\boldsymbol{v})$ によって張られている。この対角線は $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ であるが，これは $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ を θ 回転させた $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ である。よって $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が得られる。同様に $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が分かる。f は線型写像である。

f を表現する行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を f で写したものは $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を f で写したものは $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を f で写したものは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ なので

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。

演習問題 *1.19 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を f とする。このとき f の表現行列を求めよ。