線型解析 I 要綱 #6	2003–6–5	河野

2 n 次元ベクトルと (m,n) 行列

高校時代のベクトルは幾何学的なものとして導入された。我々も今まで扱ったのはそれであった。幾何的なものに固執している限り一般次元に拡張する事は易しくない。しかし代数的にみると平面のベクトルは 2 個の実数の組で表され，空間のベクトルは 3 個の組で表されている。そこに着目して一般化を行う。

2.1 n 次元ベクトル空間

定義 2.1 n を自然数とする。n 個の実数 $a_1,\dots,a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて n **次元ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。ベクトルは普通太文字で ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{v}$ 等) 書き表す。2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$ と $\boldsymbol{b}=(b_i)$ が等しいとは，各 i ($i=1,\dots,n$) に対し $a_i=b_i$ が成立する時と定義する[(1)]。n 項 (列) 数ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$(実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す。) と書いて n **次元ベクトル空間**と言う (n **項数ベクトル空間**ともいう) [(2)]。平面のベクトル全体の集合は $\boldsymbol{R}^2$，空間のベクトル全体の集合は $\boldsymbol{R}^3$ と表される (点を位置ベクトルと同一視して)。行ベクトルも同様に考えられるが我々は普通列ベクトルを考え，以下いちいち列ベクトルとはことわらない事にする。

3 次元ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix}$ がある。4 次元ベクトルの例として $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$,

5 次元ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 506 \\ 365 \\ 123 \\ 290 \\ 745 \end{pmatrix}$ などが考えられる。

(1) 何を当たり前の事をくどくど述べているのかと思う人もいるかもしれないが,「何を同じと思うか」という事は数学では (でも) 結構大切である。

(2) ベクトルとベクトルの集まりであるベクトル空間を混同する人がいるので注意する事。一般に，元と集合を混同しない事

n 次元ベクトルには和と実数倍が以下の様に定義できる。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

(a_i), (b_i) の記号を用いると，

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i), \qquad \alpha(a_i) = (\alpha a_i)$$

となる。

高校で学んだ 3 次元までのベクトルの時は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ という書き方でもよかったが n 次元のベクトルになると添字付きの表現の方が便利である。

次は殆ど自明であるがベクトルの概念を更に拡張する時，大切な役割を果たすので一応命題としてあげておく。

命題 2.2 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の元とし α, β を実数とする時次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

幾つかを証明し残りは演習問題としておく。

証明 (1) を示そう。実数に関しこのタイプの結合法則は知られているものとする。つまり任意の実数 a, b, c に対し $a + (b + c) = (a + b) + c$ の成立は仮定する。$\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i), \boldsymbol{w} = (w_i)$ とする。$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_i + v_i)$ であるので，

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = (u_i + v_i) + (w_i) = ((u_i + v_i) + w_i) = (u_i + (v_i + w_i)) = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

よって示された。次に (3)。$\mathbf{0}$ をすべての成分が 0 であるベクトルとすると，この性質を満たす事はすぐ分かる。[3] ∎

実数 $\boldsymbol{R}$ は 1 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^1$ と同一視できる。実数 a と 1 次元ベクトル (a) は厳密には同じものではないが同一視しても混乱は起こらないので以下そう考える。

演習問題 2.1　命題 2.2 を証明せよ。

高校のときはベクトルを幾何学的なものと考えていたので成分が実数であるということは当然とされた。しかし定義 2.1 の様に拡張された段階では係数が複素数の場合も同様な理論を展開することが可能である。定義としてきちんと書けば以下の様になる。

定義 2.3 n を自然数とする。n 個の複素数 $a_1, \ldots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて n **次元複素ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。n 次元複素ベクトル全体を $\boldsymbol{C}^n$(複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ で表す) と書いて n **次元複素ベクトル空間**と言う。以後定義 2.1 で定義した n 次元ベクトルを n **次元実ベクトル**と呼ぶことにする。複素ベクトルには和と複素数倍が実数の場合と同様に以下の様に定義できる。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

(a_i), (b_i) の記号を用いると，

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i), \qquad \alpha(a_i) = (\alpha a_i)$$

となる。

以上の定義を見ると実数の場合と複素数の場合が殆ど同じであることが分る。我々は以下では実数の場合と同様に複素数の場合も取り扱っていくが，性質が殆ど同じなので一々2 つの場合に分けて論議するのは面倒臭い。そこで一度に論議するために $\boldsymbol{K}$ という記号を導入する。$\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ また

[3] この証明が命題 1.1 の証明とほぼ同じである事に気がついた人もいるかもしれない。成分の個数が異なるだけで示す方法は全く同じである。

は $\boldsymbol{C}$ を表わし $\boldsymbol{K}$ の元をスカラーと呼ぶことにする。そして $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間というものを考える。$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ のときは実ベクトル空間，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ のときは複素ベクトル空間になる。繰り返しになりくどいが $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の定義を述べておく。

定義 2.4 n を自然数とする。n 個のスカラー $a_1,\dots,a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて K 上の n **次元ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。n 次元ベクトル全体を $\boldsymbol{K}^n$ と書いて K 上の n **次元ベクトル空間**と言う (n **項数ベクトル空間**ともいう)。K が明らかなときは「K 上」を省略する場合がある。

線型空間 (抽象的ベクトル空間)[4]

ベクトル及びベクトル空間の概念を n 次元に一般化したが，ここでは更に一般化する。ベクトルには和 (足し算) と実数倍または複素数倍，つまりスカラー倍 が定義されていたが，逆に和 (足し算) とスカラー倍の定義されている集合の元をベクトル空間考え，その各元をベクトルと呼ぶことにしよう。最初に例として和とスカラー倍の定義されている色々な集合を考える。

例 2.5 (1) **実 n 次元ベクトル空間**: これについては前の節で考えた。$V=\boldsymbol{R}^n$ とおくと，V には和と実数倍が定義されている。

(2) **複素 n 次元ベクトル空間**: これについても前の節で考えた。$V=\boldsymbol{C}^n$ とおくと，V には和と複素数倍が定義されている。

(3) **線型部分空間**: 例えば $V=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ とおく。V のベクトル $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$[5] とスカラー α に対し $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ と $\alpha\boldsymbol{v}_1$ も V のベクトルとなる。$\boldsymbol{K}^3$ 全体を考えないで，V のみを考える。このとき V には和とスカラー倍が定義されているとみる事ができる。

(4) $(2,2)$ **行列**: 2 行 2 列の行列を $(2,2)$ 行列 または 2×2 行列という。ここで各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。$V=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d\in\boldsymbol{K} \right\}$ とおく。V には行列の和とスカラー倍が定義されている。

(5) (m,n) **行列**: (m,n) 行列全体の集合 $M(m,n;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が定義されていた。もう一度確認すると
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m,n;\boldsymbol{K})$，$\alpha\in\boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍は

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

---

[4] 以下講義では線型空間は扱わないが，工学でも時々顔を出す概念でもあるのでプリントには書いておく事にする。以下部分空間，1 次独立，線型写像等でも同様である。

[5] ここの添字の使い方は前節で述べたものと少し違う。2 次元，3 次元の時はこの様な表記法もある。

であった。あるいは

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

とも表す。

(6) **多項式**: x に関する (実数係数) 多項式全体の集合を V とすると和と実数倍が定義されている。多項式と多項式の和は多項式となるし，多項式の実数倍も多項式になる。この x に関する (実数係数) 多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}[x]$ で表す。また n 次以下の多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}_n[x]$ と表す事にする。例えば $\boldsymbol{R}_2[x]$ は 2 次以下の多項式全体の集合，つまり 2 次式，1 次式，0 次式 (定数) 全体からなる集合である。

同様に複素数係数の多項式全体の集合を $\boldsymbol{C}[x]$ で n 次以下の複素数係数の多項式全体を $\boldsymbol{C}_n[x]$ と書く。これらには和と複素数倍が定義できる。

(7) **連続関数**: 閉区間 I または $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合を V とすると，やはり和と実数倍が定義できる。和と実数倍は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

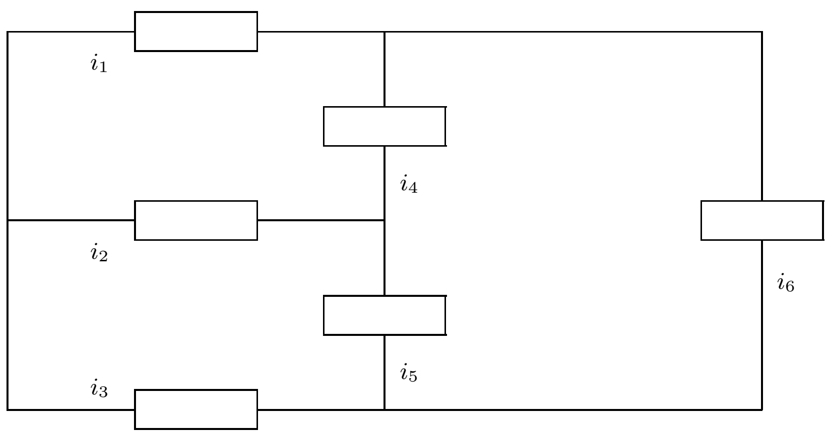
で定義する。ここでは関数 f と x に於ける値 $f(x)$ とは区別しておく。高校では x に於ける値が $f(x)$ である関数を $f(x)$ と書いて，f を独立的なものとは余り見てこなかったが，この区別は大事である (混乱の恐れのない時はどちらで表してもよい)。連続関数と連続関数の和，連続関数の実数倍はやはり連続関数になる。この集合を定義域にしたがって，$C(I)$ または $C(\boldsymbol{R})$ と書く。

また複素数値関数に対し同様に考えると，定義できる集合を $C(I;\boldsymbol{C})$ または $C(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ と書く。

(8) **微分可能な関数**: 閉区間 I または $\boldsymbol{R}$ 上で定義された微分可能な実数値関数全体の集合を V とすると，やはり和と実数倍が (7) と同じに定義できる。この集合を定義域にしたがって，$D(I)$ または $D(\boldsymbol{R})$ と書く。

同様に微分可能な複素数値関数の全体を $D(I;\boldsymbol{C})$ または $D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ と書く。

(9) **ある回路の電流の状態**: G をある回路とする。例えば次図の様なものする。



ここで box の部分は素子 (抵抗 and/or 電源等) とするが，black box で中は分からないものとする。$i_1, \ldots, i_6$ は電流，ただし向きは左から右, 下から上にとっておく。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_6)$ とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を V とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 1 法則)。

(10) **ある回路の電圧の状態**: G を (9) の回路とする。各 i_k に対応する電圧を e_k とする。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_6)$ [6]とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を W とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 2 法則)。

[6]実は (9) のベクトル $\boldsymbol{i}$ を列ベクトルで書けば，このベクトルは行ベクトルで書かれるべきである。その理由についてここではふれないが，量子力学のブラベクトルとケットベクトルの関係と同じである。

(11) **数列全体**: V を実数列全体からなる集合とする。2 つの数列 $\boldsymbol{a}=\{a_i\}, \boldsymbol{b}=\{b_i\}$ を考える。$c_i=a_i+b_i (i=1,\ldots)$ に対し $\boldsymbol{c}=\{c_i\}$ とおくとき，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と定義する。また実数 α に対し $d_i=\alpha a_i (i=1,\ldots)$ とし，$\boldsymbol{d}=\{d_i\}$ とおくとき $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}$ と定義する。複素数の数列も同様に考えることができる。

(12) **フィボナッチ数列**: 任意の自然数 n に対し $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を満たす数列 $\{a_i\}$ をフィボナッチ数列と言う。V をフィボナッチ数列全体からなる集合とする。数列 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$ をフィボナッチ数列とする。$\{c_i\}=\{a_i\}+\{b_i\}$ とすると，$\{c_i\}$ もフィボナッチ数列となる。また $\{d_i\}=\alpha\{a_i\}$ に対し $\{d_i\}$ もフィボナッチ数列。

(13) **線型微分方程式の解空間**: 線型微分方程式を考える。何でもよいがここでは 2 階の微分方程式，例えば $y''-y'-2y=0$ を考える。この微分方程式の解となる関数全体の集合を V とする。つまり

$$V=\{y \mid y''-y'-2y=0\}$$

とする。例えば $y(x)=e^{-x}$ とおくと $y(x)\in V$ である。$y_1(x), y_2(x)\in V$ の時，
$y_1(x)+y_2(x)\in V$，$\alpha y_1(x)\in V$ である(7)。解となる関数を実数値関数の範囲で考えるか，複素数値関数で考えるかで，スカラー倍 (実数倍または複素数倍) が定義され，スカラー倍も微分方程式の解になる。

以上の様な例からベクトル空間の定義を次の様に一般化する(8)。

定義 2.6 空でない集合 V に和 (足し算) とスカラー倍が定義されていて，次の (1)–(8) の性質を満足する時 V を $\boldsymbol{K}$ の**線型空間 (抽象的ベクトル空間)**(*linear space, vector space*)(9)といい V の各元を**ベクトル** (*vector*) と呼ぶ。$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を V の元とし $\alpha, \beta\in\boldsymbol{K}$ に対し

(1) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し
$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

例 2.5 で取上げた例はいずれもこの意味 (拡張された意味) でのベクトル空間になり，これをチェックする事は難しくない (→ 演習問題 2.2)。ここでは零元 (零ベクトル) の事だけ述べておこう。ベクトル空間になるためには零元が存在する事が必要であった。最初の 3 つの例では成分がすべて 0 である「普通の零ベクトル」がそれである。行列は成分がすべて 0 である零行列がそれである。多項式の場合零元は定数 0(定数も次数 0 の多項式と見る)，連続関数の場合は恒等的に 0 である関数を o と書くと (つまり任意の $x\in I$ に対し $o(x)=0$) それが零元になる。フィボナッチ数列の場合は $a_1=0$，$a_2=0$ となる数列が零元である (このときすべての自然数 n に対し $a_n=0$)。最後の微分方程式の解空間の場合の零は連続関数の場合と同じ $o(x)$ である ($o(x)$ は V の元になる)。

演習問題 2.2 例 2.5 の例がベクトル空間になる事をチェックせよ。
演習問題 2.3 次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(7) ここでは (7) とは逆に $y(x)$ が関数を表していると見た。勿論 $y\in V$ という書き方も許される。
(8) 命題 1.1 も参照の事。
(9) これも通常ベクトル空間と呼ばれるが，この講義では混乱をさけるためにこう呼ぶ事にする。線型代数関係の本を読むときは注意する事。

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'(= -\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ である。

演習問題 2.4 ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー α に対し次が成立する事を示せ。

(1) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ (2) $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(3) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$