線型解析 I 要綱 #7

2003–6–12　　河野

2.2 (m, n) 行列

一般の行列について考えよう。各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。m 行 n 列の行列 ((m, n) 行列，$m \times n$ 行列ともいう)A を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書こう行列 A を (a_{ij}) とも書く。慣れればこの方が簡単である。2 つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が等しい事をともに同じ型 ((m, n) タイプ) の行列であり，任意の i, j に対し $a_{ij} = b_{ij}$ が成立する事で定義する。

(m, n) 行列全体の集合を $M(m, n; \boldsymbol{K})$ で表す。$M(m, n; \boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が次の様に定義できる。

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m, n; \boldsymbol{K})$，$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & a_{ij} + b_{ij} & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する。和とスカラー倍は (a_{ij}) の記号で書くと

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

と書ける。とくに $m = n$ の時 $M(n; \boldsymbol{K})$ とも書き，その元を n **次 (正方) 行列**と言う。K が明らかなときは省略して，$M(n), M(m, n)$ と書く場合もある。

ここで行列の積について復習しておこう。

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \in M(n, p\,; \boldsymbol{K})$ に対し

その積 $AB = (c_{ij})$ は

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

と定義されていた。定義から分るように積 AB は (m,p) 行列になる。行列の積は全体を通じて基本的である。特に 2 重添字を用いての掛け算が自由にできるようになる事を 1 つの目標として各自取り組んでほしい (演習問題 2.7 参照)。

演習問題 2.5 [行列の計算練習] 次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

ここで実数の 1 に対応する単位行列についてふれておく。クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義した時，n 次行列 E_n を $E_n = (\delta_{ij})$[1] と定義すると次が成立する。

命題 2.7 (m,n) 行列 A に対し

$$E_m A = AE_n = A$$

が成立する。特に n 次正方行列 A に対しては

$$E_n A = AE_n = A$$

が成立する。

命題 2.7 より単位行列 E は実数の積における 1 の役割を果たす事が分る。実数の 0 に対応するのが零行列 O(すべての成分が 0 の行列) である。

演習問題 2.6 行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB = BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。4 次の行列についてそれぞれ例をあげよ。

演習問題 2.7 2 重添字に慣れるための問題

(1) 命題 2.7 を示せ

(2) 行列の積に関し分配法則 ($A(B + C) = AB + AC$,$(A + B)C = AC + BC$) と結合法則 ($(AB)C = A(BC)$) が成立することを示せ。

[1] 次数 n が明らかな場合は E とも書く。

(3) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B={}^tA$ と表す。この時 ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ を示せ。

(4) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

(5) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n=2,3,4$ 等で試算してみよ)。

(6) $i \geqq j$ の時 $a_{ij}=0$ であるような n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

定義 2.8 n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し n 次正方行列 X が存在して

$$AX=E_n \qquad XA=E_n$$

となるとき X を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。またこのとき A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*non–singular*) であるという。

3 次行列の場合と同様に $AX=E_n$ または $XA=E_n$ の一方が成立すれば X が逆行列である事が分かるが，この事実は後で行列式の所で証明する。

命題 2.9 A,B が正則な行列のとき AB も正則で，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 2.8 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

演習問題 2.9 A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ を示せ。

(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ を n 個の m 次元ベクトルの組で表すと便利なことがある。各 j $(j=1,\ldots,n)$ に対し $\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})$ とおくと，$A=(\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ と表す事ができる。(n,p) 行列 $B=(b_{ij})$ に対し $\boldsymbol{b}_j=(b_{ij})$ $(j=1,\ldots,p)$ とおくとき，$B=(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_p)$ であるが，$AB=A(\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_p)=(A\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ A\boldsymbol{b}_p)$ が成立する。