2.3 部分空間

定義 2.10 n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ の部分集合 V で

(1) $V \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$

(3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\alpha\boldsymbol{v} \in V$

の 3 つの条件を満たすものを ($\boldsymbol{K}^n$ の) **部分空間** (*subspace*) といい,

$$V < \boldsymbol{K}^n$$

と表わす。

部分空間は含まれる $\boldsymbol{K}^n$ を忘れて，それ自身を考えて，和・スカラー倍等の議論ができる「自律的な」空間と考えられる。そこでこの集合 V を「ベクトル空間」と呼ぶ事が許されるであろう。くり返しになりくどいが次を定義する。

ある次元の n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ の部分集合 V で

(1) $V \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$

(3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\alpha\boldsymbol{v} \in V$

の 3 つの条件を満たすものを ($\boldsymbol{K}$上の) **ベクトル空間** (*vector space*) という。

この新しく定義したベクトル空間の間にも部分空間という概念を定義できる。V, W をベクトル空間とする。W が V の部分集合になっているとき，W は V の**部分空間** (*subspace*) といい,

$$W < V$$

と表わす。

V をベクトル空間とするとき，V 自身と $\{\boldsymbol{0}\}$ は V の部分空間になる。これらを (V の) **自明な部分空間** (*trivial subspace*) という。

定義 2.11 V を線型空間，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V のベクトルとする。この時

$$\{\, c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid\ c_i \in \boldsymbol{K} \,\}$$

は V の部分空間になる (演習問題 2.10) が，この部分空間を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で生成される部分空間といい，$\langle\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \,\rangle$ で表し，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で**生成される部分空間**という。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の**線型結合** (*linear combination*) という。

演習問題 2.10　ベクトル空間 V と V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ について $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

例 2.12 ベクトル空間 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+w=0 \right\}$$

とする。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ である。このとき $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, W_3 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とおくと $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3$ となっている。$\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$，$\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ であり，$W_3 = V$ なので $W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq W_3 = V$ である。

演習問題 2.11　(1) $\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ (2) $\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ (3) $W_3 = V$ をそれぞれ示せ。

線型空間の部分空間

線型空間に対しても部分空間が定義されるが，形式の上では n 次元ベクトル空間と全く同じである。

定義 2.13 線型空間 V の部分集合 U が次の 3 つの条件を満たすとき V の**部分空間** (*subspace*) といい，$U < V$ と表わす。

(1) $U \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U$ に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in U$

(3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in U$ に対し $\alpha\boldsymbol{v} \in U$

例 2.14　(1) $\boldsymbol{K}_n[x], \boldsymbol{K}[x]$ を例 2.5 の (6) のものとすると，$\boldsymbol{K}_n[x]$ は $\boldsymbol{K}[x]$ の部分空間である。$\boldsymbol{K}_2[x]$ を考える。この集合の元は 2 次以下の多項式なので $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ と書ける。もう 1 つの元を $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ とすると，$f(x) + g(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ となり和も 2 次式である。スカラー倍も同様にできる。

(2) $I = [0, 1]$ とする。$C(I), D(I)$ を例 2.5 の (7)，(8) とすると，$D(I)$ は $C(I)$ の部分空間である。

(3) V を全ての実数列全体が作る線型空間 (例 2.5(11)), F をフェボナッチ数列全体からなる線型空間 (例 2.5(12)) とする。この時 F は V の部分空間である。

(4) 例 2.5 の (13) の線型微分方程式

$$L : y'' - y' - 2y = 0$$

の実数解全体からなる線型空間を De(L) とおくと De(L) は $D(\boldsymbol{R})$ の部分空間である。
解を複素数解全体とするとそれは $D(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{C})$ の部分空間になる。

演習問題 2.12　例 2.14 を証明せよ。

2.4　線型写像

定義 2.15 U, V をベクトル空間とする。U から V への写像 f が次の 2 つの性質を満たすとき**線型写像** (*linear map*) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$

形式的には 3 次元ベクトルの場合と全く同じである。

例 2.16 (1) $U=V=\boldsymbol{R}$ とする。実数上の線型写像とは正比例の事である。f を U から V への線型写像とすると，実数 a が存在して任意の実数 x に対し $y=f(x)=ax$ が成立する。即ち実数から実数への線型写像は「正比例」である。

(2) $U=V=\boldsymbol{C}$ とする。複素数上の線型写像も (複素数の意味での) 正比例である。複素数 α が存在して，任意の複素数 z に対し $w=T(z)=\alpha z$ が成立している。これは複素平面から複素平面への写像であるから α をかけるとどうなるか考えてみよう。複素数 z は実数 x,y を用いて $z=x+iy$ と書ける。また複素数 w を実数 u,v を用いて $w=u+iv$ と書いておく。α の絶対値を r， 偏角を θ とすると，$\alpha=re^{i\theta}$ と表わされる (オイラーの公式 : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$)。最初に $|\alpha|=1$ の場合を考える。$w=\alpha z=e^{i\theta}z=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=(\cos\theta x-\sin\theta y)+i(\sin\theta x+\cos\theta y)$ なので，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。つまり $e^{i\theta}$ をかける事は θ だけ回転させる事を意味する。$|\alpha|=r$ が一般のときは，これにさらに r をかけるが，この操作はは原点からの距離を r 倍にする事になる。よって複素数での正比例とは，ある角度だけ回転させその後長さを何倍かにしたものである。

(3) $U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$， $V=\boldsymbol{R}^2$ とする。
$f:U\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すると f は正射影 (projection) と呼ばれる線型写像になる。

(4) $U=\boldsymbol{K}^n, V=\boldsymbol{K}^m$ とする。ここで m,n はある自然数。m,n 行列 A を 1 つ固定する。この A に対し写像 $f_A:U\to V$ を $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定義すると，f_A は線型写像である。この f_A を行列 A により定まる線型写像という。

例 2.16 の (4) の逆が成立する。即ち次が成り立つ。

定理 2.17 $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 f に対し (m,n) 行列 A が存在して $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる。

証明 $\boldsymbol{e}_i=(\delta_{ij})$ とおく。$f(\boldsymbol{e}_i)$ は $\boldsymbol{K}^m$ のベクトルなのでこれを $f(\boldsymbol{e}_i)=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}(i=1,\ldots,n)$，$A=(a_{ij})$ と置く。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ なので

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= A\boldsymbol{x} \blacksquare
\end{aligned}
$$

定理 2.17 の行列 A の事を線型写像 f を**表現する行列**と呼ぶ(1)。$\boldsymbol{K}^n$ 以外の場合の線型写像の表現についても後で扱う。

行列の積と写像の積 (合成関数) については次が成立する。というか実はこの定理が成立するように行列の積を定義したわけである。

定理 2.18 f を $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像，g を $\boldsymbol{K}^p$ から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像とする，定理 2.17 より写像 f を表現する行列を A，写像 g を表現する行列を B とすると写像 $f \circ g$ (合成写像) を表現する行列は AB である。

演習問題 2.13 定理 2.18 を証明せよ。

定義 2.19 U, V をベクトル空間とする f を U から V への線形写像とする。このとき $\mathrm{Im}(f) = \{\boldsymbol{y} \in V \mid \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U\}$ を線型写像 f の**像** (*imarge*) と呼ぶ。$\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in U \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ を線型写像 f の**核** (*kernel*) という。$\mathrm{Im}(f) < U$, $\ker(f) < V$ が成立する ($\to$ 演習問題 2.14)。

演習問題 2.14 f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(f) < U$, $\mathrm{Ker}(f) < V$ を示せ。

例 2.20 A を (m, n) 行列とする。この時

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

$$\mathrm{Im}(f_A) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n\}$$

である。具体例を考えよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathrm{Ker}(f_A)$, $\mathrm{Im}(f_A)$ を具体的に書き表してみよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は 4 つの 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\
5x + 6y + 7z + 8w &= 0 \\
9x + 10y + 11z + 12w &= 0 \\
13x + 14y + 15z + 16w &= 0
\end{aligned}
$$

(1) A と f を同一視して，線型写像 A と言うこともある。

で表されるが，変形すると 2 つの方程式

$$
\begin{aligned}
x+y+z+w &= 0 \\
x+2y+3z+4w &= 0
\end{aligned}
$$

と同値である事が分かる。よって x, y は z, w を用いて $x = z + 2w$, $y = -2z - 3z$ と書けるので，

$$
\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z, w \in \boldsymbol{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

となる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$ とすると，$Y - X = 4(x+y+z+w)$, $Z - X = 8(x+y+z+w)$, $W - X = 12(x+y+z+w)$ なので X と Y を用いて $Z = -X + 2Y$, $W = -2X + 3Y$ と書けるので，

$$
\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; X, Y \in \boldsymbol{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

となる。

演習問題 2.15　次の行列 A に対し f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ と像 $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

定義 2.21 ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像 f が 1 対 1 上への写像(2)である時 f を**同型写像** (*isomorphism*) という。2 つの線型空間の間に同型写像が存在する時 U と V は**同型** (*isomorphic*) であるといい，$U \cong V$ と書く。

(2) $f : X \longrightarrow Y$ が 1 対 1 とは $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$，上への写像とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。

例 2.16 でいうと

(1) $a \neq 0$ のとき同型，そうでない時は同型でない。

(2) $\alpha \neq 0$ のとき同型，そうでない時同型でない。

(3) f は同型写像になる。

(4) $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。ただしこの事実の証明は後回しとする。

演習問題 2.16　上の事実を証明せよ。

線型空間から線型空間への線型写像

定義 2.22 線型空間 U から線型空間 V への写像 T が次の 2 つの条件を満たす時**線型写像** (*linear map*) という。

(1) U の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$$

(2) U の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α に対し

$$T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

いくつかの例を見よう。

例 2.23　(1) $U = V = M(2\,;\boldsymbol{K})$ とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\,;\boldsymbol{K})$ に対し V から V への写像 T を

$$T(X) = AX \qquad (X \in V)$$

で定義すると T は V から V への線型写像である。
$S(X) = XA$ と定義すると，S も V から V への線型写像である。行列なので勿論 $S \neq T$ である。

(2) $U = V = \boldsymbol{R}[x]$ とおき，$f(x) \in V$ に対しその導関数を与える多項式 $f'(x)$ を対応させる写像を D とする。

$$D(f(x)) = f'(x)$$

この時 D は線型写像である。これを $\boldsymbol{R}_n[x]$ に制限したものも $\boldsymbol{R}_n[x]$ の線型写像である。

(3) $U = C(I)$ とする ($I = [0,1]$)。$\boldsymbol{R}$ を 1 次元ベクトル空間と見る。U から $\boldsymbol{R}$ への写像 J を

$$J(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

で定義すると J は線型写像である。また $f \in U$ に対し

$$g(x) = \int_0^x f(x)dx$$

を対応させる写像を K とする。つまり $K(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(x)dx$ とする。この K は $C(I)$ から $C(I)$ への線型写像である。

(4) $U = V$ をフィボナッチ数列全体のつくる線型空間とするとする。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ に対し $\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ を $b_i = a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ とすると，$\boldsymbol{a} \in V$ のとき $\boldsymbol{b} \in W$ が分る。$\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{b}$ を対応させる (シフトと呼ばれる) 写像を S とすると S は線型写像である。

(5) $U = V = \{\, y \mid\; y'' - y' - 2y = 0 \,\}$ とする。$y(x) \in V$ に対し $y'(x) \in W$ となるので $y(x)$ に対しその導関数 $y'(x)$ を対応させる写像 D が定義できるがこれは線型写像である。

演習問題 2.17　例 2.23 を証明せよ。

演習問題 2.18　T を線型空間 V から U への線型写像，S を U から W への線型写像とすると S と T の合成写像 ST は V から W への線型写像であることを示せ。また，T が同型写像の時逆写像 T^{-1} も線型写像であることを示せ。