

2.5 1次独立, 基と次元

3次元のベクトルについて「1次独立, 基底, 次元」を考えた。ベクトル空間においても同様のものを考える事ができる。

定義 2.24 ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ が次の性質をもつとき **1次独立** (linearly independent) であるという: 即ち「スカラー c_1, \dots, c_s に対し

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

が成立していれば $c_1 = \dots = c_s = 0$]

演習問題 2.19 次のベクトルの組が1次独立かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ただし } a, b \text{ は各自の出席番号の下2桁と1桁。}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix} \text{ ここで } p, q \text{ はある定数。}$$

演習問題 2.20 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は1次独立とする。 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ に対し, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ は1次独立かどうか調べよ。

また $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1$, に対し $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ が1次独立かどうか調べよ。

更に $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$ に対し $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ が1次独立かどうか調べよ。

定義 2.25 ベクトル空間 V に対し次の性質をもつベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が存在する時これをこのベクトル空間の**基底** (base) と呼ぶ。

(1) ベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V を生成する。即ち $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ が成立する。

(2) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次独立である。

n 次元ベクトル空間 K^n についていえば基本ベクトル $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ は基底である。

演習問題 2.21 次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = K^n$ で, ベクトルの組は基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$

$$(2) V = K^3 \text{ でベクトルの組は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} \text{ でベクトルの組は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(4) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid x - y + z + w = 0 \right\} \text{ でベクトルの組は } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3次元ベクトル空間でも扱った様に基底は一通りではない。演習問題 2.21 から分かるように、ベクトル空間 \mathbf{K}^3 において基本ベクトルの組 e_1, e_2, e_3 は基底であるし、 $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と置くととき f_1, f_2, f_3 も基底である。

後で示すように \mathbf{K}^3 の基底は色々あるが個数はすべて 3 個である。そこでこの一定の数を線型空間の次元と定義したい。その前に基底の性質を明らかにするいくつかの命題を証明する。

命題 2.26 ベクトル空間 V の元 v_1, \dots, v_s が 1 次独立の時次の 2 つは同値。

(1) ベクトル v に対しスカラー a_1, \dots, a_s が存在して

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$$

(2) ベクトル v, v_1, \dots, v_s は 1 次独立でない。

証明 (1) \Rightarrow (2) $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ とすると

$$(-1)v + a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = \mathbf{o}$$

が成立するが、 $-1 \neq 0$ なので 1 次独立でない。

(2) \Rightarrow (1) 1 次独立でないとするとどれかは 0 でないスカラー a, a_1, \dots, a_s が存在して

$$av + a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = \mathbf{o}$$

が成立する。ここで $a = 0$ とすると v_1, \dots, v_s の 1 次独立性に反するので $a \neq 0$ 。よって移行して

$$v = \left(-\frac{a_1}{a}\right)v + \dots + \left(-\frac{a_s}{a}\right)v_s$$

が得られる。■

3次元のベクトルと同様に、命題 2.26 により v_1, \dots, v_n が基底であるとは極大な—つまり他のベクトルを加えると 1 次独立でなくなる様な— 1 次独立なベクトルの集合である事が分る。つまり、 v_1, \dots, v_n が基底である必要十分条件は次の 2 つが成立する事である。

(1) v_1, \dots, v_n が 1 次独立である事。つまりスカラー a_1, \dots, a_n に対し

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{o} \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

が成立する。

(2) 極大である。つまり、任意のベクトル v に対し

$$v, v_1, \dots, v_n$$

は 1 次独立でない。

これは基底を見つける方法を与える。 V を線型空間とする。最初に \mathbf{o} でないベクトル v_1 を持つてくる⁽¹⁾。次にベクトル v で v, v_1 が 1 次独立なものを探す。 $\langle v_1 \rangle = V$ ならこの様なベクトルが存在せず、 $\{v_1\}$ が基底になる。 $\langle v_1 \rangle \subsetneq V$ のとき、1 次独立なものが存在するので、それを v_2 とする。次にベクトル v で v, v_1, v_2 が 1 次独立なものを探す。 $\langle v_1, v_2 \rangle = V$ のとき、この様なベクトルが存在せず、 $\{v_1, v_2\}$ が基底になる。 $\langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq V$ のとき 1 次独立なものが存在するので、それを v_3 とする。次にベクトル v で v, v_1, v_2, v_3 が 1 次独立なものを探す。この操作を続けていくと、この操作はいつかは終わる。

演習問題 2.22 ベクトルの組 v_1, \dots, v_n が 1 次独立である事と次は必要十分である。「任意の $i = 1, \dots, n$ に対し、 $\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle \subsetneq \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i \rangle$ が成立する。ただし、 $\langle \rangle = \{\mathbf{0}\}$ とする。

次元を定義するためには次の定理が必要になる。

定理 2.27 $\{v_1, \dots, v_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ を V の 2 つの基底とすると $m = n$ である。

定理 2.27 を示すために次の補題を用意する。

補題 2.28 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を線型空間 V の基底とする。 f_1, \dots, f_r が 1 次独立の時 ($r \leq n$) v_1, \dots, v_n の番号を適当につけ変えると

$$\{f_1, \dots, f_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

は V の基底となる。

証明 r についての帰納法で示す。

(1) $r = 1$ の時。 $\{v_1, \dots, v_n\}$ は基底なのでスカラー a_1, \dots, a_n が存在して

$$f_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \tag{1}$$

と書ける。すべての i について $a_i = 0$ なら $f_1 = \mathbf{o}$ で f_1 の 1 次独立性に矛盾。 $a_i \neq 0$ となる i が存在するが適当に番号を付け替えて $a_1 \neq 0$ としてよい。この時

$$v_1 = \frac{1}{a_1} f_1 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right) v_n$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$v_1 = b_1 f_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$

⁽¹⁾ここで注意: \mathbf{o} でないベクトルが存在しない場合がある。 V が零ベクトルのみからなる線型空間 ($V = \{\mathbf{o}\}$) の場合である。この場合 0 個の基底が存在すると思ひ 0 次元という事にする。

と書き直しておく。さて $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が基底になる事を示す。 V の任意のベクトル \mathbf{v} に対しスカラー c_1, \dots, c_n が存在して

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1 (b_1 \mathbf{f}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \dots + b_n \mathbf{v}_n) + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \\ &= c_1 b_1 \mathbf{f}_1 + (c_1 b_2 + c_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (c_1 b_n + c_n) \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

と表す事ができる。次は 1 次独立性を示す。

$$c_1 \mathbf{f}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o} \quad (2)$$

とする。式 (2) に式 (1) を代入すると

$$c_1 (a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n) + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

これを整理すると

$$c_1 a_1 \mathbf{v}_1 + (c_1 a_2 + c_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (c_1 a_n + c_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

1 次独立性より $c_1 a_1 = 0$ 。 $a_1 \neq 0$ より $c_1 = 0$ が得られる。 $c_1 = 0$ のとき $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の 1 次独立性より $c_2 = \dots = c_n = 0$ 。 よって 1 次独立も示された。

(2) $r = s$ の時成立を仮定して $s + 1$ の時の成立を示す。

$$\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

は V の基底になっているので、 \mathbf{f}_{s+1} に対しスカラー a_1, \dots, a_n が存在して

$$\mathbf{f}_{s+1} = a_1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_s \mathbf{f}_s + a_{s+1} \mathbf{v}_{s+1} + \dots + a_n \mathbf{v}_n \quad (3)$$

と表す事ができる。 $a_{s+1} = \dots = a_n = 0$ だと $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{s+1}$ の 1 次独立性に反する。 $a_i \neq 0$ となる i ($s + 1 \leq i \leq n$) が存在するが番号を適当に入れ替えて $a_{s+1} \neq 0$ としてよい。この時

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{s+1} &= \left(-\frac{a_1}{a_{s+1}} \right) \mathbf{f}_1 + \dots + \left(-\frac{a_s}{a_{s+1}} \right) \mathbf{f}_s + \left(\frac{1}{a_{s+1}} \right) \mathbf{f}_{s+1} \\ &\quad + \left(-\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} \right) \mathbf{v}_{s+2} + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_{s+1}} \right) \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$\mathbf{v}_{s+1} = b_1 \mathbf{f}_1 + \dots + b_{s+1} \mathbf{f}_{s+1} + b_{s+2} \mathbf{v}_{s+2} + \dots + b_n \mathbf{v}_n$$

と書き直しておく。 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ は基底なので V の任意のベクトル \mathbf{v} に対しスカラー c_1, \dots, c_n が存在して

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{f}_1 + \dots + c_s \mathbf{f}_s + c_{s+1} \mathbf{v}_{s+1} + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1 \mathbf{f}_1 + \dots + c_s \mathbf{f}_s + c_{s+1} (b_1 \mathbf{f}_1 + \dots + b_{s+1} \mathbf{f}_{s+1} + b_{s+2} \mathbf{v}_{s+2} + \dots + b_n \mathbf{v}_n) \\ &\quad + c_{s+2} \mathbf{v}_{s+2} + \dots + c_n \mathbf{v}_n \\ &= (c_1 + c_{s+1} b_1) \mathbf{f}_1 + \dots + (c_s + c_{s+1} b_s) \mathbf{f}_s + (c_{s+1} b_{s+1}) \mathbf{f}_{s+1} \\ &\quad + (c_{s+2} + c_{s+1} b_{s+2}) \mathbf{v}_{s+2} + \dots + (c_n + c_{s+1} b_n) \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

と表す事ができる。次は 1 次独立性を示す。

$$c_1 \mathbf{f}_1 + \dots + c_{s+1} \mathbf{f}_{s+1} + c_{s+2} \mathbf{v}_{s+2} + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o} \quad (4)$$

とする。式 (4) に式 (3) を代入すると

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{f}_1 + \dots + c_s \mathbf{f}_s + c_{s+1} (a_1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_s \mathbf{f}_s + a_{s+1} \mathbf{v}_{s+1} + \dots + a_n \mathbf{v}_n) \\ + c_{s+2} \mathbf{v}_{s+2} + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o} \end{aligned}$$

これを整理すると

$$(c_1 + c_{s+1}a_1)\mathbf{f}_1 + \cdots + (c_s + c_{s+1}a_s)\mathbf{f}_s + (c_{s+1}a_{s+1})\mathbf{v}_{s+1} \\ + (c_{s+2} + c_{s+1}a_{s+2})\mathbf{v}_{s+2} + \cdots + (c_n + c_{s+1}a_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

1次独立性より $c_{s+1}a_{s+1} = 0$ 。 $a_{s+1} \neq 0$ より $c_{s+1} = 0$ が得られる。 $c_{s+1} = 0$ のとき $c_1 = \cdots = c_n = 0$ が得られ 1次独立も示される。 ■

さて定理 2.27 の証明をしよう。 $n < m$ と仮定する。 補題 2.28 を用いて基底 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ を置き換えていくと $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ が基底である事が分る。 この時 \mathbf{f}_{n+1} は $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ で表す事ができるので 1次独立性に矛盾。 よって $n \geq m$ 。 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ と $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ の役割を入れ替えると同様に $n \leq m$ も示す事ができる。 故に $n = m$ が得られる。 ■

定理 2.27 より次の定義が許される。

定義 2.29 K 上のベクトル空間 V が n 個のベクトルからなる基底

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$$

を持つ時このベクトル空間 V の (K 上の) **次元** (dimension) は n であるという。 この次元を $\dim_K V$ と表す。 K が明らかかな時は省略して $\dim V$ と書く。

命題 2.30 (1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ が 1次独立ならば $\dim V \geq n$ である。

(2) $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ ならば $\dim V \leq n$ である。

証明 (1) 補題 2.28 は、1次独立なベクトルの組に対しベクトルを付け加えて基底にできる事も意味している。 よって $\dim V \geq n$ である。

(2) $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ のとき、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が 1次独立でなければ演習問題 2.22 より、あるベクトル \mathbf{v}_k が存在して、 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = V$ となる。 1次独立でない場合はこれを繰り返す。 この議論より $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の部分集合 $\mathbf{v}_{\alpha(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\alpha(s)}$ (ここで $s \leq n$) が V の基底である事が分かり、 $\dim v = s \leq n$ が分かる。 ■

3次元のベクトルの所で証明を保留していた次の事実もこの命題からすぐ従う。「3項数ベクトルに関して、4個以上のベクトルの組は1次独立ではない。」

証明 3項数ベクトル空間では、基本ベクトルが基底になるので、次元は3である。 もし4個以上のベクトルの組が1次独立なら命題 2.30 より次元が4以上になり矛盾。 よって4個以上のベクトルは1次独立でない。 ■

演習問題 2.23 次のベクトル空間の次元を求めよ。

$$(1) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$$

$$(2) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x + 5y = 0 \right\}$$

$$(3) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$(4) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$$

$$(5) V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x + 4y - z + w = 0 \right\}$$

$$(6) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(7) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(8) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(9) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

線型空間の次元

定義 2.31 線型空間 V のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：即ち「スカラー c_1, \dots, c_s に対し

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

が成立していれば $c_1 = \dots = c_s = 0$ 」

一般の線型空間 V に対し次の性質をもつベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が存在する時これをこの線型空間の **基底** (*base*) と呼ぶ。

(1) ベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V を生成する。即ち $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ が成立する。

(2) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立である。

\mathbf{K} 上の線型空間 V が n 個のベクトルからなる基底

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

を持つ時この線型空間 V の (\mathbf{K} 上の) **次元** (*dimension*) は n であるという。この次元を $\dim_{\mathbf{K}} V$ と表す。 \mathbf{K} が明らかな時は省略して $\dim V$ と書く。またこの時線型空間 V は有限次元であるという。有限個の基底を持たない時無限次元という⁽²⁾。量子力学では無限次元複素線型空間を取り扱う必要があるが、この講義では有限次元空間のみを扱う。

⁽²⁾‘無限個の基底’ という概念もあるがこの講義では取り扱わない。

F を例 2.5(12), つまりフィボナッチ数列全体のつくる線型空間とする。 F の次元が 2 である事を示す。フィボナッチ数列は初項と第 2 項を決めると

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (5)$$

という関係式によって全体が決まる事を注意しておく。 $\mathbf{v}_1 = \{x_i\}$ を $x_1 = 1, x_2 = 0$ となるフィボナッチ数列, $\mathbf{v}_2 = \{y_i\}$ を $y_1 = 0, y_2 = 1$ となるフィボナッチ数列とする。 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が F の基底になる事を示す。 $\mathbf{o} = \{z_i\}$ ($z_1 = 0, z_2 = 0, \dots$) なので $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$ とすると, 第 1 項と第 2 項を比べる事により $a = 0, b = 0$ を得るので 1 次独立は示された。次に任意のフィボナッチ数列 $\mathbf{a} = \{a_i\} \in F$ が $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で表される事を示す。 $a_1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1 x_1 + a_2 y_1$, $a_2 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_1 x_2 + a_2 y_2$ が成立している。任意の i について $a_i = a_1 x_i + a_2 y_i$ が成立する事を帰納法で示す⁽³⁾。

$i, i-1$ について成立を仮定する。式 (5) より

$$a_{i+1} = a_i + a_{i-1} = a_1 x_i + a_2 y_i + a_1 x_{i-1} + a_2 y_{i-1} = a_1(x_i + x_{i-1}) + a_2(y_i + y_{i-1}) = a_1 x_{i+1} + a_2 y_{i+1}$$

よって $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2$ が成立する。

De(L) を例 2.5(13), つまり線型微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の解全体のつくる線型空間とする。De(L) の次元は 2 である事を示す。そのためには微分方程式に関する次の定理を必要とする。証明は微分方程式の本にでているので省略 (定理はもっと一般的に証明される)。

定理 2.32 n 階の (定係数) 線型微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

を考える⁽⁴⁾。 n 個の初期値 $y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$ に対し, それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一つ存在する。

定理 2.32 より $y_1(x)$ を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ をみたす De(L) の元, $y_2(x)$ を $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ をみたす De(L) の元とすると, $\{y_1(x), y_2(x)\}$ が基底になる。 $ay_1(x) + by_2(x) = 0$ のとき $x = 0$ を代入して, $a = ay_1(0) + by_2(0) = 0$ を得る。また与式を微分すると $ay_1'(x) + by_2'(x) = 0$ 。 $x = 0$ を代入すると $b = ay_1'(0) + by_2'(0) = 0$ を得る。 $y(x)$ を De(L) の任意の元とする。 $y(0) = a, y'(0) = b$ とおくと $y(x)$ も $ay_1(x) + by_2(x)$ も同じ初期値を持つ線型微分方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の解である。定理 2.32 の解の一意性より $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ が得られる。

⁽³⁾ここで数学的帰納法について一言。高校では“(1) $r = 1$ で成立”と“(2) r で成立 $\implies r + 1$ で成立”の 2 つからすべての自然数についての成立を導くタイプが殆どであったと思う。ここで考えたように“(1) $r = 1, 2$ で成立”“(2) r と $r + 1$ で成立 $\implies r + 2$ で成立”の 2 つから導く事もできる。また“(1) $r = 1$ で成立”“(2) r より小さい全てで成立 $\implies r$ で成立”というタイプもある。

⁽⁴⁾ $y^{(n)}$ は y の n 次導関数である。