2.6　ベクトル空間の成分表示と線型写像の表現

数ベクトル空間は成分で表示されているので取扱に色々便利な点が多い。しかし一般のベクトル空間 V に対しては通常の成分表示では取扱いにくい場合も起こる。例から始めよう。

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ としよう。任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と書けるが，x, y, z は任意ではなく $x+y+z=0$ という条件を満たす必要がある。

一方 V の基底として $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるので V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はあるスカラー a_1, a_2 を用いて $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2$ と書く事ができる。つまり V には座標軸として $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ が与えられていると見る分けである。このとき $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の「表現」しているものと考える事ができる (元のベクトルと区別するため鈎括弧とした)。即ち $\boldsymbol{x}$ の「表現」を $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}$ の「表現」を $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ の「表現」は $\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$ となっている。「表現」という言葉をきちんと定義するため次の写像を定義する。

V の基底 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を E と書く。V から $\boldsymbol{K}^2$ への写像 φ_{E} を次で定義する。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2$ となるスカラーが一意的に定まる。このとき $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ と定める。このとき φ_{E} は線型写像であり，しかも同型写像である。一般に次を定義する事ができる。

定義 2.33 V をベクトル空間，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とする。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。しかもこの書き表し方は 1 通りである。この時 V から $\boldsymbol{K}^n$ への写像 φ_{E} を

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

で定義する。

命題 2.34 定義 2.33 で定義した φ_{E} は V から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像であり，しかも同型である。

証明　$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in V$ が

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

と表わされているとする。この時

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{v}_n$$

となるので

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{y})$$

が成立する。また

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha x_n\boldsymbol{v}_n$$

より

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\alpha\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})$$

も成立するので φ_{E} は線型写像である。

同型写像である事を示すには φ_{E} が全射 (上への写像) かつ単射 (1 対 1 写像) である事を示せばよい。まず全射；$\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ とおくと，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となるので OK。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ に対し $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}')$ を仮定すると，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}')$ なので $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{x}'$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が解り，φ_{E} は単射である。 ∎

V の次元が n である時命題 2.34 よりベクトル空間としては $\boldsymbol{K}^n$ と同じものであると考えることができる。これを '基底によるベクトル空間 V の表現' という。1 つ基底を決めると $\boldsymbol{K}^n$ への同型写像が決まるが，基底を取り替えると別の対応になる。数ベクトル空間と違って '自然な' 基底は存在しないのでどれが '自然な' 表現であるかということは決めるわけにはいかない。

この表現は数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ でも考える事ができる。例えば $V = \boldsymbol{K}^2$ において

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えると $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は V の基底になっているのでこれを E とおく。ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{K}^2$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

と現わすことができた。E では

$$\boldsymbol{v} = \frac{x+y}{2}\boldsymbol{f}_1 + \frac{y-x}{2}\boldsymbol{f}_2$$

と表される。即ち

$$\varphi_{\mathsf{E}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y-x}{2} \end{bmatrix}$$

が成立する。通常の座標系で成分 x, y を持つベクトル $\boldsymbol{v}$ は E では成分 $\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}$ を持つと考える事ができる。

特に，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ からなる基底を E_0 とおくと，

$$\varphi_{\mathsf{E}_0}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となっている。

演習問題 2.24 次の場合に $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

(1) $V = \boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(3) $V = \boldsymbol{R}^3$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

演習問題 2.25 2 つの $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V,W に関して次元が等しければ V と W は同型である事を示せ。

数ベクトル空間でない場合でも線型写像を行列表示する事ができる。ただし，数ベクトル空間の時と違って標準的な座標系というものが無いのでそれぞれのベクトル空間に対し座標系を 1 つ決めて初めて対応が定まる。定理 2.17 の一般化として次の定理が得られる。

定理 2.35 V を n 次元ベクトル空間，W を m 次元ベクトル空間とする。$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$\mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ を W の基底とする。V から W への線型写像 T に対し行列 $A \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $A\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\mathsf{F}}T(\boldsymbol{x})$ が成立する。つまり，$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \varphi_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

が成立する。

証明 命題 2.34 より V の基底 E に対応して同型写像 $\varphi_{\mathsf{E}} : V \to \boldsymbol{K}^n$ が存在する。同様に同型写像 $\varphi_{\mathsf{F}} : W \to \boldsymbol{K}^m$ も存在する。$\varphi_{\mathsf{E}}^{-1}$ も同型写像なので $\varphi_{\mathsf{F}} T \varphi_{\mathsf{E}}^{-1}$ は $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像になる (演習問題 2.18)。この時定理 2.17 より行列 $A \in M(m, n\ ; \boldsymbol{K})$ が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $A\boldsymbol{v} = \varphi_{\mathsf{F}} T \varphi_{\mathsf{E}}^{-1}(\boldsymbol{v})$ が成立する。$\boldsymbol{v} = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})$ と置くと定理が得られる。 ∎

この行列 A の事を基底 E,F に関する T の表現行列という。定理 2.35 より行列は「線型写像の表現」と見ることができる。

V から W への線型写像 T を調べる時に，φ_{E},φ_{F} で $\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}^m$ での議論に翻訳して行列 A を調べる事で T の性質を調べようというのが「表現する」という考え方である。

T が V から V 自身への写像の時は 1 つの基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ で表すのが普通である。

演習問題 2.26 次の線型写像 $f : V \to U$ に対し基底 E, F に関する表現行列を求めよ。

(1) $V = U = \boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \mathsf{E} = \mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

(2) $V = U = \boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \mathsf{E} = \mathsf{F} = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\}$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z \right\}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, U = \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}, \mathsf{F} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z \right\}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, U = \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}, \mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

線型空間とその間の線型写像の表現

一般の線型空間でも同様の表現を考えたい。以下この節では線型空間は有限次元のものだけをあつかい，いちいち断らない。

数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ には基本ベクトルからなる ‘自然’ な基底が存在する。数ベクトル空間でない一般の (有限次元) ベクトル空間の場合 (標準的かどうかはさておき) にはその様なものは存在しないが，与えられた基底に関して同様の事は考える事ができる。次の定義を与える (形式的には数ベクトル空間と全く同じである)。

定義 2.36 V を線型空間，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とする。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。しかもこの書き表し方は 1 通りである。この時 V から $\boldsymbol{K}^n$ への写像 φ_{E} を

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

で定義する。

命題 2.37 定義 2.36 で定義した φ_{E} は V から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像であり，しかも同型である。

例としてフィボナッチ数列全体の作る線型空間 F を考えよう。前にやったように $\boldsymbol{v}_1 = \{x_i\}$ ($x_1 = 1, x_2 = 0$ となるフィボナッチ数列) と $\boldsymbol{v}_2 = \{y_i\}$ ($y_1 = 0, y_2 = 1$ となるフィボナッチ数列) に対し $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が基底であった。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ は $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ と表されるので，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ と表される。この写像 φ_{E} はフィボナッチ数列全体の作る線型空間 F から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像を与える。

次に微分方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の解空間を De(L) について考える。ただし考える関数は実関数とする。即ち実数 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間を考える。前にやった様に $y_1(x)$ を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ をみたす De(L) の元，$y_2(x)$ を $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ をみたす De(L) の元とすると，$\mathsf{E} = \{y_1(x), y_2(x)\}$ は De(L) の基底であった。De(L) の任意の元 y は実数 a_1, a_2 を用いて，$y = a_1y_1 + a_2y_2$ と書く事ができる。この φ_{E} は De(L) から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像である。

次に別の基底を取った場合を考える。$w_1(x)$ を $w_1(0) = 1, w_1'(0) = 1$ をみたす De(L) の元，$w_2(x)$ を $w_2(0) = 1, w_2'(0) = -1$ をみたす De(L) の元とすると，$\mathsf{F} = \{w_1(x), w_2(x)\}$ も De(L) の基底となる (演習問題 2.27)。このとき y に対し $y = b_1w_1 + b_2w_2$ となる実数 b_1, b_2 が存在し，$\varphi_{\mathsf{F}}(y) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とするとき，φ_{F} も De(L) から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像になる。このとき $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ はどの様な関係にあるだろうか。E は基底なので $w_1 = c_1y_1 + c_2y_2$ となる実数 c_1, c_2 が存在する。この式に $x = 0$ を代入すると，$c_1 = 1$ を得る。微分して $x = 0$ を代入すると，$c_2 = 1$ を得る。$w_2 = d_1y_1 + d_2y_2$ となる実数が存在するが，これも同様にして $d_1 = 1, d_2 = -1$ が分かる。これを $y = b_1w_1 + b_2w_2$ に代入すると，$y = (b_1 + b_2)y_1 + (b_1 - b_2)y_2$ が分かる。即ち $a_1 = b_1 + b_2$，$a_2 = b_1 - b_2$ が得られる。行列の形で書くと

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

となる。

一般に線型空間 V の 2 つの基底 $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ と $\mathsf{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n\}$ に対し，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\varphi_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とおくとき，ある n 次行列 A が存在して

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

となる。

演習問題 2.27　$w_1(x), w_2(x)$ が De(L) の基底である事を示せ。

定理 2.38 V を n 次元線型空間，W を m 次元線型空間とする。$\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$\mathsf{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_m\}$ を W の基底とする。V から W への線型写像 T に対し行列 $A\in M(m,n\,;\boldsymbol{K})$ が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ に対し $A\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})=\varphi_{\mathsf{F}}T(\boldsymbol{x})$ が成立する。つまり，$\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \varphi_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

が成立する。

例を見よう。ベクトル空間 $V=\boldsymbol{R}_2[x]$ と V 上の線型写像 D について考える。基底として

$$\mathsf{E}=\{1,x,x^2\}=\{f_0(x),f_1(x),f_2(x)\}$$

を考える。$Df_0(x)=0$, $Df_1(x)=f_0(x)$, $Df_2(x)=2f_1(x)$ なので

$$\varphi_{\mathsf{E}}(Df_0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi_{\mathsf{E}}(Df_1)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi_{\mathsf{E}}(Df_2)=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

なので微分を表現する行列 A は

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になる。

次に線型微分方程式の解空間 $V = \{y \mid y'' - y' - 2y = 0\}$ 上の線型写像 D を考える。$\mathsf{E} = \{y_1(x), y_2(x)\}$ を節 2.6 で定義した基底とする。つまり $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ となる V の元とする。$y(x) \in V$ が $y(0) = a, y(0) = b$ を満たす時

$$\varphi_{\mathsf{E}}(y(x)) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

である。$z(x) = y'(x)$ とおくと $z'(x) = y''(x) = y'(x) + 2y(x)$ より $z(0) = b$,$z'(0) = 2a + b$ となるので D を表現する行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

になる。

演習問題 2.28

(1) $V = M(2\,; \boldsymbol{K})$,$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $T(X) = AX$ とおく (例 2.5,2.23 参照)。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく時基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ に関する T の表現行列を求めよ。

(2) (1) と同じく E をとる。$S(X) = XA$ の表現行列を求めよ。

(3) 例 2.23 のフィボナッチ数列全体がつくるベクトル空間上の線型写像 S について節 2.5 で定義した基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関しての表現行列を求めよ。