# 線型解析 II 要綱 #3

2003–10–14 河野

## 3.3 階数の幾つかの定義とその同値性

**定義 3.6** 4 種類の**階数** (rank) を定義しよう。$A = (a_{ij})$ を $(m, n)$ 行列とする。行列の $i$ 列を縦ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}_i = (a_{ij})$ と書き，行列 $A$ は縦ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を横に並べたものと考え，$A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と書き表す事ができる。行列の $j$ 行を横ベクトルと見たものを $\boldsymbol{a}^*{}_j = (a_{ij})$ と書き，行列 $A$ は横ベクトル $\boldsymbol{a}^*{}_i$ を縦に並べたものと考え $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^*{}_1 \\ \boldsymbol{a}^*{}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^*{}_m \end{pmatrix}$ と書き表す事ができる。

(1) 行列 $A$ に基本変形を行ない対角成分以外を 0，対角成分を 0 または 1 にした時の 1 の個数を $\mathrm{rank}_1(A)$ と表す。

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_2(A)$ と表す。

(3) $\{\boldsymbol{a}^*{}_1, \cdots, \boldsymbol{a}^*{}_m\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_3(A)$ と表す。

(4) $I(A) = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,\}$ の次元 $\dim I(A)$ を $\mathrm{rank}_4(A)$ と表す。

**定理 3.7** 定義 (1)，(2)，(3)，(4) は同じもの。
つまり，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ である。よってこの定理が証明された後はこれを $\mathrm{rank}(A)$ と表す。

$A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に対し定理 3.7 が正しいのは明らかであろう。だが，一般の場合に定理 3.7 を証明するためには基本変形の性質を調べる事が必要になる。しかし，$\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ はその知識がなくても証明できるので，それを最初に補題として証明しておく。

**補題 3.8** $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ が成立する。

**証明** $A = (a_{ij}), \boldsymbol{a}_j = (a_{ij}), \boldsymbol{e}_j = (\delta_{ij})$ と置くと，$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j$ より，$\boldsymbol{a}_j \in I_A$。ここで，$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とする。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。$\boldsymbol{a}_k (k > r)$ に対し，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_k\}$ は 1 次独立ではない。よって $\boldsymbol{a}_k = \beta_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{kr}\boldsymbol{a}_r$ と表わすことができる。任意の $\boldsymbol{w} \in I_A$ に対し，$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書ける事を示せば，$\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が $I_A$ の基底となり，$\mathrm{rank}_4(A) = \dim I_A = r = \mathrm{rank}_2(A)$ がいえる。$\boldsymbol{w}$ に対し $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{x}$ となる。$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けるので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= A\boldsymbol{x} = A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1A\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_nA\boldsymbol{e}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + +x_{r+1}(\beta_{r+11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{r+1r}\boldsymbol{a}_r) + \cdots + x_n(\beta_{n1}\boldsymbol{a}_1 \cdots + \beta_{nr}\boldsymbol{a}_r) \\
&= (x_1 + x_{r+1}\beta_{r+11} + \cdots + x_n\beta_{n1})\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_r + x_{r+1}\beta_{r+1r} + \cdots + x_n\beta_{nr})\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}$$

となり，よって補題は示された。 ∎

定理 3.7 を示すために次の補題を示す。

**補題 3.9** $P, Q$ を基本行列とする時,

$$\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$$
$$\mathrm{rank}_3(QA) = \mathrm{rank}_3(AP) = \mathrm{rank}_3(A)$$

が成立する。

**略証** 同様にできるので，$\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$ だけ証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とすると，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。この時 $Q\boldsymbol{a}_1, \ldots, Q\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立である事を示す。$\alpha_1 Q\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r Q\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ とすると $Q(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{o}$ なので $Q^{-1}$ を両辺にかけると $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ 得る。これより $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$。よって $\mathrm{rank}_2(QA) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ である。同様の議論を $Q$ に代えて $Q^{-1}$ を用いることにより $\mathrm{rank}_2(QA) \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ を得るので $\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(A)$ は成立する。
$AP = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)$ とおく時，次の 3 つの場合について示せばよい。

(1) $P = P_n(k, \ell)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(2) $Q_n(k; \lambda)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(3) $R_n(k, \ell; \alpha)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_\ell, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(1),(2) は明らかに 1 次独立なベクトルの最大個数は同じであるので $\mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$ は成立する。(3) の場合最初に $\mathrm{rank}_2(AP) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ を証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とし $\{\boldsymbol{a}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha(r)}\}$ が 1 次独立であるとする。$\alpha(\ell') = \ell$ となる $\ell$ が存在しない時は $\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r)}\}$ も 1 次独立である (実際同じもの)。よって 1 次独立なベクトルの組は必ず $\boldsymbol{a}_\ell$ を含んでいる事を仮定する。$\alpha(\ell') = \ell$ となる $\ell$ が存在する時は $\ell' = r$ としても一般性を失わない。$\{\boldsymbol{a}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{a}_\ell\}$ が 1 次独立であるとする。$\boldsymbol{a}_k = \alpha_1\boldsymbol{a}_{\alpha(1)} + \cdots + \alpha_{r-1}\boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}$ と書けないとき，$\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{b}_k\}$ が 1 次独立になり仮定に反する。$\boldsymbol{a}_k = \alpha_1\boldsymbol{a}_{\alpha(1)} + \cdots + \alpha_{r-1}\boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}$ と書けるとき $\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{b}_\ell\}$ は 1 次独立である。よって $\mathrm{rank}_2(AP) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ が分かる。$\boldsymbol{a}_\ell = -\alpha\boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{b}_\ell$ なので，$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_i$ の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_2(AP) \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が得られるので証明は終わる。 ∎

**定理 3.7 の証明** 命題 3.5 より行列 $A$ に対し基本行列 $P_1, \ldots, P_t, Q_1, \ldots, Q_s$ が存在して

$$A = Q_s \cdots Q_1 A_0 P_1 \cdots P_t$$

と書ける。ただし $A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$。この時 $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_1(A_0) = r = \mathrm{rank}_2(A_0) = \mathrm{rank}_3(A_0)$ が成立する。補題 3.9 を順に適用することにより

$$\mathrm{rank}_2(A_0) = \mathrm{rank}_2(AP_1) = \cdots = \mathrm{rank}_2(AP_1 \cdots P_t) = \mathrm{rank}_2(Q_1AP_1 \cdots P_t) = \cdots = \mathrm{rank}_2(A)$$

を得る。$\mathrm{rank}_3(A)$ についても同様にできるので O.K. ∎

正方行列に関して階数と正則性の間には次の関係がある。

**命題 3.10** $A$ が $n$ 次行列のとき，$A$ が正則 (逆行列を持つ) である必要十分条件は $\mathrm{rank}(A) = n$ である。

**証明** $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする。

$A$ が正則のとき $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立である事を示せば，$\mathrm{rank}(A) = n$ が分かる。$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので $A^{-1}$ を両辺にかけると $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が分かる。

$\mathrm{rank}(A) = n$ とすると $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{s}_n$ は 1 次独立である。このとき $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{s}_n$ はベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ の基底である。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対しスカラー $x_1, \dots, x_n$ が存在して $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n$ と書ける。特に $\boldsymbol{b}$ として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 達をとってくる。即ち各 $i$ $(i = 1, \dots, n)$ に対しスカラー $b_{i1}, \dots, b_{in}$ が存在して $\boldsymbol{e}_i = b_{i1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{in}\boldsymbol{a}_n$ が成立する。$B = (b_{ij})$ とおいて行列で書き直すと $E = BA$ を意味している。よって $B$ は逆行列[(1)]。 ∎

**演習問題 3.3** 次の行列の階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

[(1)] 本来なら $AB = E$ も示す必要がある。実は $BA = E$ から $AB = E$ が出て来るのだが，これは次の章で扱う。