線型解析 II 要綱 #4

2003–10–16　　河野

3.4 連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式について 3.1 で考えた問題には階数を用いて，次の様に述べる答える事ができる。

定理 3.11 方程式 $(E), (E_v), (E_M)$ が解を持つための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\,\boldsymbol{b})$$

である。また解空間 $W(A)$ の次元は $n - \operatorname{rank} A$ である。

命題 3.12 行列 $(A|\boldsymbol{b})$ は行基本変形と列の入替え（ただし，$\boldsymbol{b}$ の列は入替えない）で次の形に変形できる。

$$\left(\begin{array}{cc|c} E_r & C & \boldsymbol{b}_1' \\ O & O & \boldsymbol{b}_2' \end{array}\right)$$

ここで，$r = \operatorname{rank}(A)$。この時 (E) が解をもつ必要十分条件は $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{o}$ であり，(H) の解空間の次元は $n - \operatorname{rank} A$ である。

命題 3.12 を証明すれば定理 3.11 も示されたことになるが，ここでは基本変形によらない形の証明を与えておこう。

定理 3.11 の証明：　$\operatorname{rank}(A) = r$ とする時 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立としても一般性を失わない。今解が存在するとする。$\operatorname{rank}(A\,\boldsymbol{b}) \geqq \operatorname{rank}(A)$ は明らかである。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するので，補題 3.8 の議論と同様に，$\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書け，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}\}$ が 1 次独立でない事が分かる。よって $\operatorname{rank}(A\,\boldsymbol{b}) = \operatorname{rank}(A)$ が成立する。

逆に $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\boldsymbol{b})$ のときは 1 次独立性の議論よりあるスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ にとれる$)$ が存在して $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n$ と書ける。この時 $\boldsymbol{x} = {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は (E) の解になる。

$\dim W(A) = s$ とした時 $n = s + \operatorname{rank} A$ である事を示す。$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ を $W(A)$ の基とする。$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r (r = \operatorname{rank} A)$ を I_A の基とする。各ベクトル $\boldsymbol{b}_i (i = 1, \ldots, r)$ に対し $A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{b}_i$ となるベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を 1 つ決める。この時

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$$

が基である事が示されれば，$\boldsymbol{K}^n$ の次元は n なので定理は証明される。

$\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{w}_s + \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{o}$ とする。両辺に A をかけると $A\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{o}$，$A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{b}_j$ より $\beta_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{o}$ となる。$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の 1 次独立性より $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$。更に $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ の 1 次独立性より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$。$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトルとする。$A\boldsymbol{x} \in I_A$ なのでスカラー $\beta_1, \ldots, \beta_r$ が存在して $A\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{b}_r$ と書ける。この時 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{v}_r$ と置くと $A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}$ となる。よってスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ が存在して $\boldsymbol{x}' = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{w}_s$ と書ける。以上により

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{w}_s + \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_r\boldsymbol{v}_r$$

と書けて $\boldsymbol{K}^n$ の基となる。 ∎

系 3.13 $m = n$ のとき，A が正則ならば連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯 1 つの解を持つ。

演習問題 3.4　次の連立方程式が解を持つかどうか定理 3.11 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ。

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z + 1u + 1v + 2w = 1 \\ 1x + 2y + 2z + 2u + 3v + 3w = 2 \\ 1x + 1y + 2z + 3u + 2v + 3w = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5z = a + 3 \\ 3x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5z = b + 3 \end{cases}$$

3.5　基本変形を用いた逆行列の計算

この節では基本変形を用いて逆行列を計算する方法を扱う。

基本変形を行なうとは基本行列をかける事なので，基本変形を何回か行なうということは正則な行列を左右からかける事になっている。この事から次の命題が証明される。これを用いると逆行列の計算が割と楽にできる。

命題 3.14 n 次行列 A が正則ならば行基本変形だけで E_n に変形できる。
正則な n 次行列 A に対し $(A|E_n)$ を行基本変形で $(E_n|B)$ にしたとき，$B = A^{-1}$ である。

変形が途中でできなくなれば正則ではない。コンピュータ等では普通この方法で逆行列を計算する。
証明　命題 3.5 より基本行列 $P_1, \ldots, P_t, Q_1, \ldots, Q_s$ が存在して

$$Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで A は正則行列なので右辺は E_n となる。即ち $Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t = E_n$ となる。ここで両辺に右から P_t^{-1} をかけると $Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_{t-1} = Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t P_t^{-1} = E_n P_t^{-1} = P_t^{-1}$ となる。さらに両辺に左から P_t をかけると，$P_t Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_{t-1} = P_t P_t^{-1} = E_n$ となる。以下これを繰り返していくと，$P_1 \cdots P_t Q_s \cdots Q_1 A = E$ を得る。この事は A は行基本変形だけで E_n に変形できる事を示している。

$(A|E_n)$ を行基本変形で $(E_n|B)$ にしたとき，基本行列の積でかける行列 X が存在して $X(A|E_n) = (E_n|B)$ となっている。このとき $XA = E_n$, $XE_n = B$ となるので，$X = A^{-1}$ かつ X_B よって $B = A^{-1}$ となる。

演習問題 3.5　次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$