線型解析 II 要綱 #6

2003–11–6　　河野

4　行列式

高校で学んだように 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad - bc$ という量は逆行列の存在を判定できる等，重要な量であった。これを一般の n 次行列に対しても定義するというのがこの章の目的である。

4.1　3 次行列の行列式

2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対しその行列式 $\det(A)$ を $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で定義する。高校では「行列式」という言葉は出て来ていないが，実際には，行列式は次の性質を持つ事を (少なくとも数学 C を選択した学生は) 学んでいる；行列式 $\det(A)$ は『A が逆行列を持つ $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$』という性質を持つ。この様な性質を持つものを 3 次の行列に対しても定義したい。そのために 2 次の場合行列式とはどの様なものかを見直してみる。幾何的ベクトルも考えるので，この節ではしばらく行列の成分は実数としておく。

幾何的には「有効面積」と考えられる。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおく。$\det(A) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 即ち 2 つの 2 次元ベクトルの組に対し実数が対応していると考える。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の面積と考えられる。「有効」の意味は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負をである状況を表現している。

代数的には次の性質を持つ実数への写像と考えられる。

(1) [**多重線型性**]　$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(2) [**交代性**]　$\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$

逆にこの 3 つの性質は行列式を特徴づける。実際 2 次元ベクトル 2 個の組に対し実数を対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である。

演習問題 4.1　$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である事を示せ。

3 次行列に対して行列式を定義しよう。最初に代数的な立場から考えよう。3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

に対し，これを 3 次元ベクトル 3 個の組と考える。

即ち $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と見る。

3 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に対し実数を対応させる写像 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が次の性質を持つとする。

(1) [**多重線型性**]　$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}'_1$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}'_2$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}_3)$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \alpha\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}'_3$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}'_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}'_3)$

2") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(2) [**交代性**]　$\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$$

命題 4.1 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が上の (1), (2), (3) を満たすとき

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

となる。

あとで見るように一般の n に対しては代数的な立場から拡張を行うが，3 次元においては幾何的な見方も重要である。次に幾何的に拡張を考えよう。

3 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ に対し，$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ と見るのは代数的な場合と同じである。$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が張る平行 6 面体の「有効体積」で定義する: 即ち絶対値は体積で，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が右手系のときは正，左手系のときは負とする。これが代数的見方のときあげた (1), (2), (3) を満たすので同じものを定義している事が分かる。

ここで 3 次元ベクトルに対し**外積** (*outer product*) (または**ベクトル積** (*vector product*)) を定義する。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し絶対値が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積で，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と直交するベクトルを $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ とする。ただし，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ が右手系をなすものとする。

命題 4.2 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ と書く事にする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

が成立する。

証明　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と表す。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積を S とすると，$S^2 = (|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta)^2$ より，$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ を得る。これを計算すると，$S^2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$ で $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ は平行 4 辺形の面積になる。

内積 $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ はそれぞれ 0 になるので $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{y}$ が分かる。また $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ より $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ が右手系をなす事が分かる。∎

命題 4.3 外積は次の性質を持つ写像と考えられる。

(1) [**多重線型性**]　$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $(\alpha\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ に対し $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}'$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し $\boldsymbol{x} \times (\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$

(2) [**交代性**]　$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$

逆にこの 3 つの性質で外積は特徴付けられる。

命題 4.4 $\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立する。

命題 4.5 $A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に対し

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

とおくと $\widetilde{A}A = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

演習問題 4.2　命題 4.3，4.4 及び命題 4.5 を証明せよ。

定理 4.6 行列 A に対し命題 4.5 で定義された $\widetilde{A}$ を考える。このとき $A\widetilde{A} = A\widetilde{A} = \det(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。特に $\det(A) \neq 0$ とのとき逆行列が存在して $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ である。

証明　今 $\det(A) \neq 0 \iff \det(\widetilde{A}) \neq 0$ を仮定する[(1)]。この仮定の下で $\det(A) \neq 0$ のとき $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ が出て来る。$\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}A = E_3$ は計算より出て来るので $A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A} = E_3$ を示す。$\widetilde{A}$ にこの定理を適用すると，$\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A} = \det(\widetilde{A})E_3$ が得られる。$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A = \widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A)$ であるが，$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A = \det(\widetilde{A})E_3A = \det(\widetilde{A})A$, $\widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A) = \widetilde{\widetilde{A}}\det(A)E_3 = \det(A)\widetilde{\widetilde{A}}$ より $\dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}} = \dfrac{1}{\det(A)}A$ を得る。
$A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A} = \dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A} = E_3$

(1) 後で示すが $\det(\widetilde{A}) = \det(A)^2$ が成立する。