

## 5 固有値・固有ベクトルと対角化

この章では固有値・固有ベクトル・対角化について学ぶ。この問題ではスカラーが実数か複素数かで議論が変わってくる。特に断らない場合はどちらでも成立するが、実数と複素数で異なる場合はそれを注意する。

### 5.1 3 次行列の対角化

この節では 3 次行列の場合の対角化について議論する。一般の場合は次節で扱う。

例から始めよう。  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  とする。  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ なので}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

対角成分以外が 0 であるような行列を対角行列と呼び、行列  $A$  に対し  $P^{-1}AP$  が対角行列になるような  $P$  を求め、実際に  $P^{-1}AP$  を求める事を対角化という。

対角化には色々な応用がある。ここではべき乗の計算のみを取り上げる。 $A$  の  $n$  乗を計算してみよう。 $B = P^{-1}AP$  とおくと、 $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$  となる。以下同様にして  $B^n = P^{-1}A^nP$  を得る。 $B$  は対角行列なので

$$B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

が分かる。

この例では  $P$  は天なりに与えられた。逆にもしこの様な  $P$  が存在したとする。 $P = (a \ b \ c)$  とす

ると、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  より、 $AP = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  を得る。このとき  $(Aa \ Ab \ Ac) =$

$$A(a \ b \ c) = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4a \ b \ c) \text{ より } Aa = 4a, Ab = 4b, Ac = 4c \text{ が得られる。逆}$$

にこの様な  $a, b, c$  で 1 次独立なものが見つければ, 命題 5.1 より行列  $(a \ b \ c)$  は正則である。この変形を逆にたどり  $P$  が見つかる。

次の命題は以前扱ったがもう一度述べておく。

命題 5.1 3 項数ベクトル  $x, y, z$  が 1 次独立である事は  $P = (x \ y \ z)$  が逆行列を持つ事の必要十分条件である。

証明  $P$  が逆行列を持つとする。  $ax + by + cz = 0$  が成立しているとする。この式を行列とベクトルの積の形で書くと  $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ 。この式の左から  $P^{-1}$  をかけると  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$  を得る。

逆に  $x, y, z$  が 1 次独立とする。  $P = (x \ y \ z)$  に階数は 3 である。よって任意のベクトル  $b$  に対し  $xx + yy + zz = b$  は解を持つ。  $b = e_1$  とすると  $e_1 = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$  となる  $a_{11}, a_{21}, a_{31}$  が存在する。同様に  $e_2 = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, e_3 = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$  なるスカラーが存在する。このとき  $Q = (a_{ij})$  が  $P$  の逆行列を与える。 ■

定義 5.2 行列  $A$  に対し, スカラー  $\lambda$  と 0 でないベクトル  $x$  が存在して,  $Ax = \lambda x$  となる時,  $\lambda$  を  $A$  の固有値 (eigenvalue, proper value) と言い,  $x$  を ( $\lambda$  に属する)  $A$  の固有ベクトル (eigenvector, proper value) と言う。

$$W(\lambda) = \{x \in K^3 \mid Ax = \lambda x\}$$

を  $\lambda$  に属する  $A$  の固有 (ベクトル) 空間 (eigenspace, proper subspace) と言う。

$\Phi(t; A) = \Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$  を  $A$  の固有多項式 (eigenpolynomial, proper polynomial) といい, 方程式,  $\Phi(t; A) = 0$  を  $A$  の固有方程式 (eigenequation, proper equation, characteristic equation) という。また, この方程式の解を特性解 (characteristic root) をいう。

命題 5.3 固有方程式  $\Phi(t; A) = 0$  の解 (特性解) が  $K$  に属していれば  $A$  の固有値である。逆に固有値は固有方程式の  $K$  における解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 5.4  $\det(B) = 0$  という事は, あるゼロでないベクトル  $x$  が存在して  $Bx = 0$  となる事の必要十分条件である。

証明 (1)( $\Leftarrow$ ) 対偶を示す。  $\det(B) \neq 0$  の時定理 4.6 より逆行列が存在するので  $Bx = 0$  の左から  $B^{-1}$  をかけると  $x = B^{-1}Bx = B^{-1}0 = 0$ , よって O.K.

(2)( $\Rightarrow$ )  $B = (a \ b \ c)$  とおく。命題 5.1 より  $a, b, c$  は 1 次独立ではない。よってすべては 0 ではない実数  $x, y, z$  が存在して  $xa + yb + zc = 0$  となる。  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とおき, これを行列の形に直

すと  $Bx = 0$  が得られる。 ■

命題 5.3 は補題において  $B = tE_n - A$  と考えるとでてくる。 $K$  が複素数の場合、解はいつでも複素数であるから、特性解はいつでも固有値である。実数の場合特性解が実数なら固有値、そうでなければ固有値でない。

演習問題 5.1 次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 5.5  $n$  次行列  $A$  が対角化可能である必要十分条件は  $n$  個の 1 次独立な固有ベクトル  $u_1, u_2, u_3$  が存在する事である。この時、 $P = (u_1 \ u_2 \ u_3)$  とおき、 $Au_i = \lambda_i u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ が成立する。}$$

証明  $u_i$  を  $\lambda_i$  に属する固有ベクトルとする ( $i = 1, 2, 3$ )。一次独立な  $u_1, u_2, u_3$  が存在するとする。

$$AP = A(u_1 \ u_2 \ u_3) = (Au_1 \ Au_2 \ Au_3) = (\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \lambda_3 u_3) = (u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

が成立する。命題 5.1 より逆行列  $P$  が存在するので O.K.

逆に  $A$  が対角化可能であるとき、 $P = (u_1, u_2, u_3)$  を  $A$  を対角化する行列、即ち  $P^{-1}AP$  が対角行列とする。対角行列  $P^{-1}AP$  を  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  とすると、 $A(u_1, u_2, u_3) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3)$

となるので  $u_i$  は固有ベクトルである。 $P$  が逆行列を持つので  $u_1, u_2, u_3$  は 1 次独立である。■

演習問題 5.2 次の行列を対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$