線型解析 II 要綱 #11

2003–12–2　　河野

5.2 固有値・固有ベクトル

前節で考えた固有値・固有ベクトル等一般の n 次行列に対しを定義する。

定義 5.6

(1) **線型写像に対する固有値・固有ベクトル**　V をベクトル空間とし，$f: V \to V$ を線型写像とする。スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ となる時，λ を f の**固有値** (*eigenvalue*) と言い，$\boldsymbol{v}$ を（λ に属する）f の**固有ベクトル** (*eigenvector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid\ f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\,\}$$

を λ に属する f の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace*) と言う。

(2) **行列に対する固有値・固有ベクトル**　n 次行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector*) と言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の**固有（ベクトル）空間** (*eigenspace*) と言う。

(3) **固有方程式**　$\Phi(t : A) = \det(tE_n - A)$ を A の**固有多項式** (*eigenpolynomial*) といい，方程式，$\Phi(t : A) = 0$ を A の**固有方程式** (*eigenequation*) という。また，この方程式の複素数における解を**特性解** (*characteristic root*) をいう。

命題 5.7 固有方程式 $\Phi(t : A) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ における解は A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 5.8 $\det(B) = 0$ という事はあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となることの必要十分条件である。

証明　(1)($\Longleftarrow$) 対偶を示す。$\det(B) \neq 0$ の時系 4.19 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，よって O.K.
(2)($\Longrightarrow$)$B = (\boldsymbol{v}_1 \ldots \boldsymbol{v}_n)$ とおくと命題 5.1 より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立でない。この時どれかは 0 ではない実数 $a_1, \ldots, a_n$ が存在して，

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とおいて式 1 を書き直すと

$$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

が得られる。 ∎

命題 5.7 は $B = tE_n - A$ とおけばでてくる。

演習問題 5.3　次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

0) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 5.9 n 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は n 個の1次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が存在する事である。この時，$P = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ は対角行列。

証明　$\boldsymbol{u}_i$ を λ_i に属する A の固有ベクトルとする。$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が1次独立とする。

$$AP = A(\boldsymbol{u}_1 \dots \boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \dots \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \dots \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1 \dots \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成立する。命題 5.1 より逆行列 P が存在するので O.K.

逆に A が対角化可能であるとき $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P が存在する。$P = (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_n)$ とすると $\boldsymbol{u}_i$ は λ_i に属する固有ベクトルで，P が逆行列を持つから $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は1次独立である。 ∎