線型解析 II 要綱 #12

2003–12–4　　河野

5.3　対角化問題

前節の結果から n 次行列を対角化をするためには 1 次独立な固有ベクトルを n 個見つければよい。逆に言うと，その様な固有ベクトルの組が存在しないとき n 次行列は対角化できない事になる。固有ベクトルの 1 次独立性に関しては次が基本的である。

定理 5.10 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ を行列 A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとすると，それらは 1 次独立。

証明　s についての帰納法で示す。

(1)　$s = 1$ の時。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $\{\boldsymbol{x}_1\}$ は 1 次独立である。

(2)　$s = k$ の時成立を仮定する。つまり

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$$

は 1 次独立とする。実数 $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ に対し

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

が成立している時に $a_1 = \cdots = a_{k+1} = 0$ を導けばよい。式 2 に左から行列 A 書けた時 $\boldsymbol{x}_i$ が固有ベクトルである事に着目すると

$$\lambda_1 a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k a_k\boldsymbol{x}_k + \lambda_{k+1}a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

が得られる。この時式 (2) を λ_{k+1} 倍して式 3 から引くと

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

が得られ 1 次独立性より

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1 = \cdots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k = 0$$

$\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0 (i = 1, \ldots, k)$ より $a_1 = \cdots = a_k = 0$ が得られ，式 2 に戻って考えれば $a_{k+1} = 0$ が得られる。

系 5.11 n 次行列 A が相異なる n 個の固有値を持てば対角化可能。

系 5.12 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 (特性解) がすべて固有値である時，各固有値 λ に対し $\dim W(\lambda) =$ (λ の重複度) が成り立てば，対角化可能。

ここで行列の対角化の方法についてまとめておこう。

(1) **固有値を求める。**　対角化するためには最初に固有値を求める。そのために固有方程式を作りその解を求める。解が求まったら，それが固有値であるかどうかをチェックする。スカラー $\boldsymbol{K}$ が複素数の集合 $\boldsymbol{C}$ であるときは自動的に固有値になっている実数の場合は解が実数でなければダメ。実数なら固有値となる。

(2) 1 **次独立な固有ベクトルを** n **個求める。**　それぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求める。固有値が固有方程式の単根 (重解でない解) なら固有ベクトルを 1 個定める。この場合必ず存在する。(固有ベクトルがゼロベクトルになった場合は固有値の計算が間違っている。) k 重解になる場合は k 個の 1 次独立な固有ベクトルを探す。求まればよし，そうでない場合は対角化不可能である。

(3) **固有ベクトルを並べて** P **を作る。**　$\boldsymbol{u}_1 \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が求まったら，$P = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ とおくと $P^{-1}AP$ が対角行列になり対角化ができる。

演習問題 5.4　次の行列を対角化せよ。

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

演習問題 5.5　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。ただし $\boldsymbol{K}$ は実数の場合と複素数の場合の 2 通りの場合を調べよ。

1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

対角化できない行列に対して対角化とまではいかなくても次善の策を考えよう。それは 3 角化と呼ばれる。行列が固有値を持たない場合は手の打ちようがないが[1]行列が固有値を持つ場合を考える。

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ として対角化を試みる。固有方程式は $\Phi(t; A) = \det(A - tE) = -(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) = (t-2)(t-1)^2 = 0$ なので特性解は $t = 2, 1$ である。2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$B\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ より $x = y = 0$ が従う。そこで $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$t = 1$ は重解なので解の重複度は 2 である。1 に対応する 1 次独立な 2 個の固有ベクトルが存在すれば対角化できる。1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$B\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2$ より $z = -x, y = -z$ が従う。これを満たす 1 次独立なベクトルは 1 個しか存在しない。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。このままでは対角化できないが 3 番目のベクトルとして $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立になるような任意のベ

[1] 演習問題 5.5 の 1) で実数の範囲で考えた場合 $(\theta \neq 0, \pi)$ がそうなっている

クトル $\boldsymbol{x}_3$ を選ぶ。それを $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする。$P = (\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3)$ は $a+b \neq 0$ のとき逆行列を持ち $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b-c}{a+b} & -\dfrac{a+c}{a+b} & 1 \\ \dfrac{b}{a+b} & -\dfrac{a}{a+b} & 0 \\ \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{a+b} & 0 \end{pmatrix}$ となり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & -(a+b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。この様な行列を下 3 角行列と呼ぶ。一般に行列 $A = (a_{ij})$ が $i > j$ に対し $a_{ij} = 0$ となっているとき**下 3 角行列**という。n 次行列 A が重複度もこめて固有値を n 個持つとき，正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が下 3 角行列になる。

$\boldsymbol{x}_3$ を $a+c=0$ となる様に選べば，もう少し簡単な行列になるが，これがどの様な条件なのか述べよう。
n 次行列 A が λ を固有値に持つとする。固有方程式の λ の重複度が n_1 だとする。$W(\lambda)$ の次元が n_1 であれば，n_1 個の 1 次独立なベクトルが選べるが，一般には次元は n_1 以下である。次元が n_1 よりほんとに小さいときは n_1 個は選べない。

そこで $U(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K} \mid (A - \lambda E)^{n_1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と定義する。$U(\lambda)$ は**一般固有ベクトル空間**と呼ばれる。$W(\lambda) \subseteq U(\lambda)$ となり，また $\dim U(\lambda) = n_1$ である事が分かる。そこで固有ベクトルでは足りない分のベクトルを $U(\lambda)$ から選ぶ事にすると，$P^{-1}AP$ は少し簡単になる。上の $c-b=0$ という条件は $\boldsymbol{x}_3 \in U(1)$ という条件なのであった。これをチェックしておこう。$C = B - 1E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，$U(1) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K} \;\middle|\; C^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ より，$\boldsymbol{x} \in U(1)$ となる条件は $a+c=0$ である事が分かる。