線形解析 I 問題解説 #1

河野

解説の仕方が不十分で理解しづらい等の意見があればお寄せ下さい。できれば具体的に指摘していただいた方がありがたいです。改良できる範囲で改良して行きます。イントロでも言ったように，そのものズバリの解答は書きません。しかし実際書きはじめてみるとこれはなかなか難しいものです。

演習問題 1.1　命題 1.1 を証明せよ。

(1) はすでに示してある。(2) 以降は要するに成分表示に直して実数の和・積に関する性質を用いればよい。((2) は講義でやってしまいました。)

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ y_3+x_3 \end{pmatrix}$ である。実数の和に関する交換法則より $x_i + y_i = y_i + x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ となるので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となる (解答を書かないとイントロで書いたのに解答をかいてしまいましたネ)。(3) 以降は (2) と同様に出来るので特に付け加えることなし。

演習問題 1.2　次を命題 1.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

成分表示を用いないという所がポイントです。成分表示を用いれば簡単なのに，何故この様な問題を出したかについて一言。

ベクトル空間の概念は後で扱う n 次元ベクトル空間より更に一般化されています。特に無限次元ベクトル空間は量子力学を始めとして色々なところで使われています。その最も一般化されたベクトル空間の概念は命題 1.1 を持つようなものとして定義されます。その様に定義される分けは，ベクトル空間の諸性質がこの命題からすべて導き出されるという事実があるからです。

(1) $\boldsymbol{x}$ に対し $-\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ という性質を持ちます。逆にこの性質を持つとそのベクトルは $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルです。($\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ とします。逆ベクトル $-\boldsymbol{x}$ を両辺に加えると，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}+(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ となります。$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{y}$ となり，$-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が分かります。) この事が分かっていればあとは $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せばよい事になります。

(2) $\boldsymbol{0}$ は任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ となります。逆に (厳密には逆ではないが) あるベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ が成立すれば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である (この事実を証明せよ)。上の事が証明されれば，あるベクトル $\boldsymbol{x}$(何をとって来るかは君が決める) に対し $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ を示せばよい。これが出来た人は次の追加問題を考えてみて下さい。