線形解析 I 問題解説 #2

河野

演習問題 1.3　次の集合で部分空間になるものはどれか考えよ。

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

(3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $W_7 = \boldsymbol{R}^3$

(8) $W_8 = \{\boldsymbol{0}\}$

部分空間になるためには 3 つの条件を満たしている事を調べればよい。逆に言うと 3 つの条件のうち 1 つでも満たさないものがあれば，部分空間ではない。条件の 1 番目はすべて満たしている事は容易にチェックできる (であろう)。最初に部分空間になるかならないかあたりをつけて，なると思われる場合は 2 つの条件を例等に従って示せばよい。証明の途中でうまく行かないようであれば，あたりのつけ方が間違っていて成り立たない方なのかもしれないので方針変更を考える (事になるかもしれない)。例えば (1) を考える。W_1 は部分空間になりそうに思われる (原点を通る平面を表しているような感じがする) ので証明を試みる。W_1 の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ をとってくる。このとき $x_1 - x_2 + x_2 = 0$, $y_1 - y_2 + y_3 = 0$ が成立

している。この和がまた W_1 のベクトルである事を示せばよい。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ なので，$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3)=0+0=0$ となり，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_1$ が分かる。3 番目の条件に関しても同様にやればよい。

ならないと思われるものには，条件を満たさないベクトルを探して持ってくればよい[1]。例えば (2) の場合，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}\in W_2$ であるが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W_2 には属さない (何故か?)。2 番目の条件満たさないので部分空間ではない。

演習問題 1.4　次の部分空間で等しいものはどれか?　ただし $\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_6=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\{\boldsymbol{0}\}$　(2) $\langle\,\boldsymbol{x}_0\,\rangle$　(3) $\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$
(4) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\,\rangle$　(5) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$　(6) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$
(7) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$　(8) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle$　(9) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_6\,\rangle$
(10) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$　(11) $\boldsymbol{R}^3$

最初に表示に無駄がないかどうか調べる。即ち例えば $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ と書かれているが，実際には $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle$ となる場合もあるからである。

$\langle\,\boldsymbol{v}\,\rangle$ の様に 1 個のベクトルから生成される場合，$\boldsymbol{v}$ がゼロベクトルかどうかで様子が変わる。$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の場合は任意の実数 a に対して $a\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ なので，$\langle\,\boldsymbol{v}\,\rangle=\{\boldsymbol{0}\}$ となる。それ以外のとき $\langle\,\boldsymbol{v}\,\rangle$ は $\boldsymbol{v}$ 方向の直線に対応する (位置ベクトルと考えて)。

次に $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ を考える。$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ のときは $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ なので，1 個の場合になる。よって $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_2\neq\boldsymbol{0}$ とする。ある実数 a を用いて $\boldsymbol{v}_2=a\boldsymbol{v}_1$ と書けるときは $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle$ となる (何故か?)[2]。それ以外のとき $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ はベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が張る平面に対応する (位置ベクトルと考えて)。

$\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle$ を考える。$\boldsymbol{v}_i$ のなかにゼロベクトルがあれば 2 個の場合に帰着されるのでゼロベクトルはないとする。またある実数 a を用いて $\boldsymbol{v}_i=a\boldsymbol{v}_j$ と書けていると，前の議論と同様にすると 2 個の場合に帰着される。よって $\boldsymbol{v}_i=a\boldsymbol{v}_j$ と表されることはないとする。$\boldsymbol{v}_3$ が $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ の線型結合で書けるかどうかを調べる。$\boldsymbol{v}_3=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ と線型結合で書けるとき $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ となる (何故か?)。線型結合で書けないときは $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle=\boldsymbol{R}^3$ となっている (何故か?)。

4 個以上の場合は前の 3 個について前の議論を行う。3 個で無駄がなければ，$\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle=\boldsymbol{R}^3$ なので，もう 1 個加えても $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\,\rangle=\boldsymbol{R}^3$ である。3 個で無駄が出た場合，例えば $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle$ となったときは，$\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4\,\rangle$ なので，この 3 個の場合を調べればよい。

---

(1) 条件成立は任意のベクトルについて「何とか」という形で述べられているので，その否定はあるベクトルに対して「何とかでない」という形になる。

(2) 以下「何故か?」という質問が何度か出て来るが，これを一般的に示す事をここで要求はしない。ただし，具体的な $\boldsymbol{x}_i$ 等については議論する必要がある。

次に例えば $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ が等しいかどうか調べる。このためには (1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ (2) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \supseteq \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ の 2 つを調べればよい。そのためには (1') $\boldsymbol{v}_1 \in \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ かつ $\boldsymbol{v}_2 \in \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ (2') $\boldsymbol{u}_1 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ かつ $\boldsymbol{u}_2 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ を調べればよい。この条件が 1 つでも成立しなければ $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \neq \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ である。**ここで 1 つ注意**： $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が異なっていても $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ となる事はある。例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ となっている (各自確かめよ)。

例えば $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ について等しいかどうか調べる。

$\boldsymbol{x}_2 \in \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ は明らか (何故か?)。$\boldsymbol{x}_1 \in \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ かどうか調べる。今 $\boldsymbol{x}_1 \in \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ を仮定すると (背理法)，実数 a, b を用いて $\boldsymbol{x}_1 = a\boldsymbol{x}_2 + b\boldsymbol{x}_3$ と書ける。即ち

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $b = 1, a = 2, b = 3$ となり，$1 = b = 3$ で矛盾，故に $\boldsymbol{x}_1 \notin \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \neq \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ である。

以下他のものについても同様に試みよ。

別解： 前のやり方において無駄のない表示を求めずに直接 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ 等を示してもよい。ただしその場合，個数が異なるものが一致する場合もあるので，すべての場合をチェックする必要がある。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ を示すには，(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ (2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の 2 つを示せばよい。