線形解析 I 問題解説 #3

河野

演習問題 1.5　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ただし a, b は各自の出席番号の下 2 桁と 1 桁。

(7) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

定義を理解していればできる問題ですが，しっかり理解してできるようにしておいて下さい。2 個のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である事を示すには $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ という関係式から $a = 0, b = 0$ が出て来ればいいわけです。(1) でこの事を実行してみましょう。$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という式を成分毎に書くと，$a + b = 0, a = 0, a + b = 0$ となります。よって $a = 0, b = 0$ となるのでこの場合は 1 次独立である事が分かります。

1 次独立でない場合は $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ という式から $a = 0, b = 0$ は出て来ません。出て来ない事を言うには，そうならない例 ($a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立しているのに $a \neq 0$ または $b \neq 0$ である例) を見つければいいわけです。例えば (4) を考えましょう。$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ としましょう。

成分で書くと $a + b = 0, a + c = 0, a + b = 0$ となります。即ち $a + b = 0, a + c = 0$ です。これ

から $a=0, b=0, c=0$ は出て来ません。例えば $a=1, b=-1, c=-1$ は $a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2+c\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ を満たしますが，$a=0$ ではありません。だから (4) は 1 次独立ではない事が分かります。

他も問題も同様に考えて下さい。ただし定数 (a や p, q) が入っている問題はその値により場合分けが必要になります。例えば $a=1$ のとき 1 次独立ではないが，$a\neq 1$ のとき 1 次独立である等。

演習問題 1.6　次のベクトルの組が W の基底である事を示せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W=\boldsymbol{R}^3$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, W=\boldsymbol{R}^3$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x-2y+z=0\right\}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0, x-2y+z=0\right\}$

「基底」=「1 次独立」+「生成」ですから，2 つの条件をチェックすればよいわけです。1 次独立に関しては前問と同様にやればよいので省略します。ここでは「生成」のチェックをします。(以下説明はベクトルが 2 個の場合を扱いますが，3 個または 1 個のときは適当に読みかえて下さい。)「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が W を生成する」とは $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = W$ を示せばよい分けです。そのためには (1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subseteq W$ (2) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \supseteq W$ の 2 つを確かめればよい。(1) は簡単で $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の両方が W の元である事を示せばいいんでしたネ。(2) の方は論理をきちんと理解しなければできないので，少し難しく感じるかも知れませんネ。(2) を示すためには「任意の W のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し実数 a, b が存在して $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ と書ける」事を示せばよい。問題の (4) でこの事を具体的に実行してみましょう。論理的には逆になりますが「もし $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ と書けていたら a, b はどんな数でなければならないか」という事を**予備的計算**として行います。$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となっている (ただし $x-2y+z=0$)。等式が成立するためには $a=\dfrac{x}{2}, b=\dfrac{z}{2}$ が必要です。先にこの予備的計算を行っておいて証明に入ります。

W の任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $x - 2y + z = 0$ が成立している。このとき

$$\frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{v} \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ となっている。

演習問題 1.7　次の部分空間の基底を 1 組求め，次元を求めよ。

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 5y + z = 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(3) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0 \right\}$

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0, x + y + z = 0 \right\}$

この type の問題は昨年も試験に出したし，今年も多分出すと思われます。自分で基底候補を 1 組見つけ，それが実際に基底になっている事を証明します。試験では基底にならないものを選んでしまって，それなのに形式をなぞって基底である事を「証明」した人も少なからずいました。それは**大減点**ですネ。閑話休題。

最初に基底候補を選んで来ます。基底は 1 次独立ですから，1 次独立なベクトルの組を選びますが，何個選べばよいかは「慣れれば」見れば分かるようになります。(1) を考えてみましょう。この場合基底を構成するベクトルの個数は 2 個です。「慣れれば」と言いましたが，1 個では W を生成する事はできないし，3 個では 1 次独立になりません。選び方は自由です。一般に勝手に選んでも多くの場合 1 次独立になります。だから適当に選んでもいいですが，偶然 1 次独立にならない場合もあるので，概念を理解している人は最初から 1 次独立になるように選びます。例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{v}_1 \in W, \boldsymbol{v}_2 \in W$ となっています。あとは前問の様に「1 次独立」と「生成」を示せばよいわけです。

選ぶとき間違って 1 次独立でないもの，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を選んでしまった場合,「1 次独立」の証明がうまく行かなくて，そこで気がつくと思います。その場合は違う組を取り直します。個数の予想を間違って $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選んだ場合も「1 次独立」の証明の所で気がつくと思います。

W の元でないベクトル，例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{v}_2 \notin W)$ を選んでしまった場合「生成」の証明がうまく行かなくてそこで気がつくと思います。その場合も取り直しです。(でも実際は気がつかない人が多いんだな〜。)