線形解析 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.8　命題 1.11 を示せ。

ベクトルの所でやったのと同じ様に示せばよい分けです。(1) のみ示しましょう。$A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$ とする。$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ なので $(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})$ となります。一方 $B+C=(b_{ij}+c_{ij})$ なので $A+(B+C)=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))$ となります。実数の和の結合法則より $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ となるので $(A+B)+C=A+(B+C)$ が成立します。他の命題は同様にできるので省略します。

演習問題 1.9　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB=BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A\neq O$,$B\neq O$ で $AB=O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。

前者は任意に行列 A,B を持って来ると $AB=BA$ が成立しない場合がほとんどです。自分が決めた A,B に対し $AB=BA$ が成立した場合別のものを選んで下さい。

後者は A,B として成分に 0 の多い行列を選ぶと $AB=O$ に成り易いです。一番 0 の多い行列は 1 つの成分を除いてすべて 0 という行列ですが…。

演習問題 1.10　次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a,b は自分の在籍番号の下 2 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 2 乗と 3 乗

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $i \geqq j$ の時 $a_{ij}=0$ であるような行列 $A=(a_{ij})$ に対し A^3

これはただ計算するだけですネ。ただし (3) 及び (4) は $n=2,3$ で試しに計算してみて，一般でどうなるかを予想する必要があるかもしれません。

逆に任意の行列と可換な行列はスカラー行列に限る。

演習問題 $^{(*)}$1.11　上の事実を証明せよ ((*) がついている問題は少し難しいかも)。

(p,q) 成分 (p 行 q 列の成分) のみ 1 で他の成分が 0 になる行列を E_{pq} と書く。例えば $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。$A = (a_{ij})$ が任意の行列と可換だとすると，E_{pq} の形の行列とも可換である。この 9 個の行列と可換であるという条件を書き下せば証明される。

転置行列に対し次が成立する。

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad {}^{tt}A = A $$

演習問題 1.12　上記の事を証明せよ。

行列 $A = (a_{ij})$ の転置行列 ${}^tA$ に対しその成分を (c_{ij}) とおくと，$a_{ij} = c_{ji}$ の関係がある。この事実を用いてそれぞれの成分を書き下せば出て来る。

演習問題 1.13　行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，即ち $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，任意の $i,\ j$ について $a_{ij} = a_{ji}$ が成立するとき，A を**対称行列** (*symmetric matrix*) という。また ${}^tA = -A$ が成立するとき，つまり任意の $i,\ j$ について $a_{ij} = -a_{ji}$ が成立するとき**交代行列** (*alternating matirx*) という。このとき次を示せ。

(1) $A_s = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $A_a = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおくとき，A_s は対称行列，A_a は交代である。

(2) $A = B + C$ と表されて，B が対称，C が交代行列のとき，$B = A_s, C = A_a$ が成立する。

演習問題 1.11 で示した事実を使います。それともう 1 つ，うっかり書き忘れましたが，${}^t(aA) = a\,{}^tA$ という事実も使います (各自証明して下さい)。(1) は A_s, A_a の転置行列を計算してみれば分かります。(2) は A の転置行列をとって，それを B, C を用いて表して見て下さい。A と ${}^tA$ がともに B, C で表されているとき，これを連立方程式だと思って B, C に関して解くと…。

演習問題 1.14　対称行列 $A,\ B$ に対し A と B が可換である事と AB が対称行列という事は同値である事を示せ。

また $A,\ B$ が交代行列のときはどうなっているか調べよ。

まず A, B ともに対称行列のときを考える。A, B が可換と仮定する。つまり $AB = BA$ とする。この行列の転置行列をとって計算すると ${}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA{}^tB$ が得られる。あとはこれを計算すると AB が対称行列である事が分かる。逆に AB が対称行列であると仮定すると ${}^t(AB) = AB$ が成立している。これを計算していくと A, B が可換であるという式が出て来る。

交代行列の条件は ${}^tA = -A$ です。それに注意しながら対称行列の場合と同様に計算していくと得られます。

演習問題 1.15　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

A の逆行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ が存在すると仮定します。このとき $AX = E$ ($XA = E$ でもよい) が成立するための条件を成分を用いて書き下します。x_{ij} に関する連立方程式がでてきますが，これを解くと $x_{21} = 0$ 等解がでてきます。ここで 0 **での割算をしてはいけない**事に注意すると，ある条件 $(*)$ がでてきます。また逆行列も $a, \ldots, f$ を用いて書けます。逆に条件 $(*)$ が満たされているとき上で求めた x_{ij} からつくられる行列 X は逆行列になっています。

演習問題 1.16　A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示せ。

行列の積と逆行列の関係式 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ と，行列の積と定置行列の関係式 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を用いれば出て来ます。