線形解析 I 問題解説 #5

河野

演習問題 1.17　次の行列で表現される線型写像 f_A に対し $\mathrm{Ker}(f_A)$ 及び $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

すでに例でも取り上げているので 1 つだけ解いておきましょう。どれでもいいんですが，(3) をやりましょう。$\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \middle|\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ ですから $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ となる条件を x, y, z に関し書き下します。計算すると $x = 0$ がでてきます。逆に $x = 0$ のとき $\boldsymbol{x}$ は $\mathrm{Ker}(f_A)$ の元になります。よって $\ker(f_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle|\ x = 0 \right\}$ です。生成系で書き直すと

$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となります。

$\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3 \middle|\ \text{あるベクトル}\boldsymbol{x}\text{に対し}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \right\}$ ですから，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$X = x, Y = 2x, Z = 3x$ となるので $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので $\mathrm{Im}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ となります。

演習問題 1.18　U, V, W を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とすると，合成写像 $g \circ f$ も線型写像であることを示せ。

$f : U \to V$ が上への 1 対 1 写像であるとき，逆写像 f^{-1} も線型写像である事を示せ。

$g \circ f$ が線型写像である事を示すためには

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \in U$ に対し $g \circ f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = g \circ f(\boldsymbol{u}) + g \circ f(\boldsymbol{v})$

(2) 任意の $\boldsymbol{u} \in U$ と任意の実数 α に対し $g \circ f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha g \circ f(\boldsymbol{u})$

の 2 つを示せばよい分けです。(1) は $g \circ f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = g(f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}))$ なので，ここで f が線型写像か

ら $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が分かるので，これを代入すると，$g(f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}))$ が得られ，更に g が線型写像という事を用いると $g(f(\boldsymbol{u})) + g(f(\boldsymbol{v})) = g \circ f(\boldsymbol{u}) + g \circ f(\boldsymbol{v})$ が得られます。(2) も同様で，$g \circ f(\alpha \boldsymbol{u}) = g(f(\alpha \boldsymbol{u})) = g(\alpha f(\boldsymbol{u})) = \alpha g(f(\boldsymbol{u})) = \alpha g \circ f(\boldsymbol{u})$ となります。

$\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ とおくと $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ となります。この事から $f^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{y}_1) + f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)$ が出て来ます。これは f^{-1} が線型写像の定義の (1) を満たしている事を示しています。また $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ とおくと，$\alpha \boldsymbol{y} = \alpha f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha \boldsymbol{x})$ なので，$f^{-1}(\alpha \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{x} = \alpha f^{-1}(\boldsymbol{y})$ となります。よって f^{-1} は線型写像になります。

演習問題 *1.19 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を f とする。このとき f の表現行列を求めよ。

幾何的な条件から直接求めるのは難しそうです。「直接」とは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとするとき，幾何的な条件から $f(\boldsymbol{e}_i)$ を直接計算する事を意味します。

次の様に考えましょう。$\boldsymbol{x}$ 軸を z 軸に写す長さを変えない線型写像を g とします。z 軸の周りでの θ 回転の写像を f_θ とすると，$g^{-1} \circ f_\theta \circ g$ は f と一致します (各自納得して下さい)。z 軸に関する θ 回転を表現する行列 X はすでに得られているので，g を表現する行列 B を求めれば，f を表現する行列 A は $B^{-1}XB$ となります。

g を表現する行列を求める事を考える。といってもこの様な g は色々あるので 1 つ決める必要がある。次の様に g を決める。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を長さが 1 でお互いに直交するベクトルで $\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{e}_i$ $(= 1, 2, 3)$ に写す写像を g とする。このとき $C = (\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2\, \boldsymbol{v}_3)$ とおくと $C\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$ $(= 1, 2, 3)$ なので C は g^{-1} を表現する行列になっている。よって $B = C^{-1}$ が解る。$\boldsymbol{v}_3$ と直交するベクトル $\boldsymbol{w}_1$ を探す。$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと内積を用いれば $a+b+c = 0$ を満たせばよい事が分かる。ここでは $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1$ と共に直交するベクトルを探す。$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると，$a+b+c = 0$ かつ $a-b = 0$ を満たせばよい。ここでは $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は長さが 1 でないので $\boldsymbol{v}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i}{|\boldsymbol{w}_i|}$ とおくと，$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ なので逆行列を計算すると $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ と

なるので，求める行列 $A = B^{-1}XB = CXB$ は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\cos+\theta\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$