線形解析 I 問題解説 #6

河野

演習問題 2.1　命題 2.2 を証明せよ。

3 次元のベクトルの場合にすでに証明しています。スカラーが n 個並ぶだけで証明方法は全く同じです。1 つだけ示しましょう。(6) を示します。$\boldsymbol{v} = (v_i)$ を任意のベクトル，α, β を任意のスカラーとします。$(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = (\alpha+\beta)(v_i) = ((\alpha+\beta)v_i) = (\alpha v_i + \beta v_i) = (\alpha v_i) +)(\beta v_i) = \alpha(v_i) + \beta(v_i) = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$

これ以降の問題は講義で扱っていない部分に対応する問題です。

演習問題 2.2　例 2.5 の例がベクトル空間になる事をチェックせよ。

V が線型空間 (ベクトル空間) になるためには定義されている和，スカラー倍が定義 2.6 の 8 つの条件を満たす事をチェックすればよい。特に V がすでにベクトル空間である事が知られている U の部分集合であって空ではなく

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ に対し $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \in V$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ と任意のスカラー α に対し $\alpha\boldsymbol{v} \in V$

の 2 つを示せばよい。

(1)–(5) は特に問題はないだろう。(6) は多項式同士の和がまた多項式になる事，多項式のスカラー倍がまた多項式になる事から導かれる。

(7) 一般に $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ への写像の和は値の和で定義できる。f, g をある集合 X で定義された $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ への写像とする。$f+g$ という X で定義された関数を $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ で定義する。またスカラー α(f が $\boldsymbol{R}$ への写像のときは実数，$\boldsymbol{C}$ への写像のときは複素数) に対し X 上の関数 αf を $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ で定義する。この和・スカラー倍が定義 2.6 の性質を満たすことは容易に分かる。I 上定義された $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ への写像全体が作る集合はこの演算についてベクトル空間をなす。だから連続関数 f, g とスカラー α に対し 1) $f+g$ は連続関数，2) αf は連続関数の 2 つを示せばよい。(8) もほぼ同様で微分可能な関数 f, g とスカラー α に対し 1) $f+g$ は微分可能，2) αf は微分可能の 2 つを示せばよい。

(9) 電流の状態を表すベクトル $\boldsymbol{i}$ は $\boldsymbol{R}^6$ のベクトルと考えれるので 1) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ が電流の状態を表すベクトルなら $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ も電流の状態を表すベクトル，2) $\boldsymbol{i}$ が電流の状態を表すベクトルなら実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{i}$ も電流の状態を表すベクトルを示せばよい。キルヒホッフの法則より各ノードに対しそこへ流れ込む電流の和とそこから流れ出る電流の和は等しい，逆にその様な電流を実現する様に白箱部分に抵抗等を挿入できる。各ノードに関し $\boldsymbol{i}$ が電流の状態を表すベクトルのとき $i_1 = i_4 + i_6$, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, $i_2 + i_4 = i_5$, $i_2 + i_5 + i_6 = 0$ となる。1) を示すには $\boldsymbol{j}$ に関する条件も書き下し，この 2 つから $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ についての条件が出る事を見ればよい。2) も同様。

(10) も (9) と同様にできる。この場合電圧に関するキルヒホッフの法則を用いる。回路内のサイクルにそって電圧を加えたものは 0 である。勿論サイクルを逆に読んだとに電圧は符号を取り換えたものとする。

(11) 数列に定義された和，実数倍が定義 2.6 の条件を満たすことをチェックせよ。(12) はフェボ

ナッチ数列の和及び実数倍がまたフェボナッチ数列になる事を示せ。

(13) は微分可能な関数の作る線型空間の部分集合なのでこの線型微分方程式の解 f, g に対し, $f+g$ 及び αf がまたこの微分方程式の解になる事を示せばよい。和のみ示しておこう。$f,$ は微分方程式の解なので $f''-f'-2f=0, g''-g-2g=0$ が成立している。$(f+g)''-(f+g)'-2(f+g)=f''+g''-f'-g'-2f-2g=(f''-f'-2f)+(g''-g'-2g)=0+0=0$

演習問題 2.3 　次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'(=-\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ である。

(1) $\boldsymbol{v}_0$ は任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}$ となる。ここで $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ とすると $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}_0$

(2) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ が成立している。両辺に $-\boldsymbol{v}$ を加えると $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}+(-\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$。よって $-\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)+(-\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}_1$

(3)$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ の両辺に $-\boldsymbol{v}$ を加えると $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$ となる。また $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+(-\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{w}$ なので成立。

演習問題 2.4 　ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー α に対し次が成立する事を示せ。

(1) $(-1)\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$ 　　(2) $0\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

(3) $\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

(1) 習問題 2.3 (2) より $\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を示せばよい。$\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=(1+(-1))\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}=0$(ここで (2) の成立を仮定しておく。)

(2) 演習問題 2.3 (3) よりあるベクトル $\boldsymbol{u}$ に関して $\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ を示せばよい。今 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ とすると $\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}=(1+0)\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$，よって OK。

(3) 演習問題 2.3 (3) よりあるベクトル $\boldsymbol{u}$ に関して $\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ を示せばよい。$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{0}$ とする。$\alpha\boldsymbol{0}+\alpha\boldsymbol{0}=\alpha(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=\alpha\boldsymbol{0}$