線形解析 I 問題解説 #7

河野

演習問題 2.5 [行列の計算練習] 次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

これを解説する必要はないでしょう。解らない人は行列の積の定義の所を見かえして下さい。

演習問題 2.6 行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 ($AB = BA$) が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。4 次の行列についてそれぞれ例をあげよ。

以前 3 次行列で同様の問題を出しました。やり方はそれと同じです。適当に 2 つ行列 A, B を持って来ると多くの場合 $AB \neq BA$ が成立します。でも計算するには 0 の数が多い行列の方がいいですね。余り多すぎると $AB = BA$ になってしまいますが$\cdots$。

演習問題 2.7 2 重添字に慣れるための問題

(1) 命題 2.7 を示せ

(2) 行列の積に関し分配法則 ($A(B + C) = AB + AC$,$(A + B)C = AC + BC$) と結合法則 ($(AB)C = A(BC)$) が成立することを示せ。

(3) 行列 $A = (a_{ij})$ に対し $B = (b_{ij})$ を $b_{ij} = a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B = {}^tA$ と表す。この時 ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ を示せ。

(4) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(5) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n = 2, 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(6) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(1) $E_n = (\delta_{ij})$ を単位行列とする。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ。$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とする，$B = (b_{ij}) = AE_n$ とする。$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\delta_{sj}$ となる。$s \neq j$ のとき $\delta_{sj} = 0$ なので結局 $b_{ij} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}$ となる。よって $B = A$ である。逆の積も同様にできる。

(2) $(AB)C = A(BC)$ のみ示す。$A = (a_{ij})$ を $(m.n)$ 行列，$B = (b_{ij})$ を (n, p) 行列，$C = (c_{ij})$ を (p, q) 行列とする。$AB = (d_{ij})$ とおくと $d_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$ である。$(AB)C = (e_{ij})$ とおくと $e_{ij} = \sum_{t=1}^{p} d_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}\right)c_{tj} = \sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}c_{tj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}b_{st}c_{tj}$ となる。$BC = (f_{ij})$ とおくと $f_{ij} = \sum_{t=1}^{p} b_{it}c_{tj}$ である。$A(BC) = (g_{ij})$ とおくと $g_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}f_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{t=1}^{p} b_{st}c_{tj}\right) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}b_{st}c_{tj}$ となり $e_{ij} = g_{ij}$ より $A(BC) = A(BC)$ が分かる。

(3) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, ${}^tA = (c_{ij})$, ${}^tB = (d_{ij})$ とおくと $c_{ij} = a_{ji}$, $d_{ij} = b_{ij}$ である。また $AB = (e_{ij})$, ${}^t(AB) = (f_{ij})$ とおくと $f_{ij} = e_{ji} = \sum_{s=1} a_{js}b_{si}$ である。${}^tB^tA = (g_{ij})$ とおくと，$g_{ij} = \sum_{s=1}^{n} d_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{n} b_{si}a_{js} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si} = e_{ji} = f_{ij}$, よって ${}^t(AB) =^t B^tA$ が成立。

(4),(5) については $n = 2, 3, 4$ のとき計算して，どの様な行列になるか予想する。その予想が正しいことを例えば数学的帰納法で証明すればよい。

(6) 次の命題を順に示す事により成立を示すことができる。行列 $A = (a_{ij})$ がある k に対し $j \neq i+k$ に対し $a_{ij} = 0$ となっているとする。この様な行列全体の集合を R_k と書く。$j < i+k$ のとき $a_{ij} = 0$ となる行列全体の集合を T_k と書く。定義より $k > n$ のとき R_k, T_k は零行列のみからなる。また $R_k \subseteq T_k$ である。

1) $A \in R_k, B \in R_{k'}$ に対し $AB \in R_{k+k'}$

2)$A \in T_k$ に対し行列 $A_1 \in R_k, A_2 \in T_{k+1}$ が存在して $A = A_1 + A_2$ となる。逆に行列 $A_1 \in R_k, A_2 \in T_{k+1}$ に対し $A = A_1 + A_2$ とおくと $A \in T_k$ である。

3) $A \in T_k, B \in T_{k'}$ ならば $AB \in T_{k+k'}$

4) $A \in T_1$ なら $A^n \in T_{n+1}$

演習問題 2.8　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

$B = (b_{ij})$ が $AB = E_4$ を満たすとして関係式を導きます。これが解を持つ条件が A が正則である条件です。計算すると，$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ が分かります (実際計算してみて下さい)。その条件成立のとき b_{ij} を $a, b, \ldots, x, y, z$ を使って書き下せば逆行列が求まります。

演習問題 2.9　A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示せ。

A が正則なので $AB = BA = E$ となる行列が存在します。3 辺の転置行列をとると ${}^tE = E$, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ なので ${}^tB{}^tA = {}^tA{}^tB = E$ となり ${}^tA$ も逆行列 ${}^tB$ を持つことが分かります。