線形解析 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.10　ベクトル空間 V と V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ について $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

スカラー $a_1, \ldots, a_k$ に対し $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k$ は $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ の元なので特に $a_1 = \cdots = a_k = 0$ と置く事により $\boldsymbol{0} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が解るので (1) $V \neq \emptyset$ が成立する。

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を V の任意の元とするとあるスカラー $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ を用いて $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{v}_k$ と書ける。このとき $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\boldsymbol{v}_k$ なので (2) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ となる。$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k$ と任意のスカラー α に対し $\alpha\boldsymbol{v} = (\alpha a_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha a_k)\boldsymbol{v}_k$ なので (3) $\alpha\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が分る。 ∎

ベクトル空間 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x + y + z + w = 0 \right\}$$

とする。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ である。このとき $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, W_3 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とおくと $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3$ となっている。

演習問題 2.11　(1) $\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ (2) $\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ (3) $W_3 = V$ をそれぞれ示せ。

(1) 今 $\boldsymbol{v}_2 \in W_1$ と仮定すると，あるスカラー a を用いて $\boldsymbol{v}_2 = a\boldsymbol{v}_1$ と書ける。これは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ を意味するので $1 = a = 0$ となり矛盾。よって $\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ が成立する。

(2) 今 $\boldsymbol{v}_3 \in W_2$ と仮定するとあるスカラー a_1, a_2 を用いて $\boldsymbol{v}_3 = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ と書ける。これは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を意味するので $1 = a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0$ で矛盾。よって $\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ が成立する。

(3) $W_3 \subseteq V$ は明らかなので $V \subseteq W_3$ を示す。そのためには任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対し

$\boldsymbol{x} \in W_3$ を示せばよい。予備的計算として $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ を仮定したとき a_1, a_2, a_3 が x, y, z, w からどの様に決まるかを見ると，$x = a_1 + a_2 + a_3$, $x = 2a_1$, $z = 3a_1 - a_3$, $w = -6a_1 - a_2$ なので $a_1 = \dfrac{y}{2}, a_2 = -3y - w, a_3 = \dfrac{3}{2}y - z$ となる。よって任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ について (ただし $\boldsymbol{x} \in V$ より $x + y + z + w = 0$)，$a_1 = \dfrac{y}{2}, a_2 = -3y - w, a_3 = \dfrac{3}{2}y - z$ とおくと $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + (-3y - w)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (\dfrac{3}{2}y - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{y}{2} - 3y - w + \dfrac{3}{2}y - z \\ y \\ \dfrac{3}{2}y - \dfrac{3}{2}y + z \\ -3y + 3y + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$ と表すことができる。

演習問題 2.12　例 2.14 を証明せよ。

この問題は実質的には演習問題 2.2 で解説しています。そちらを見てください。

演習問題 2.13　定理 2.18 を証明せよ。

これはすでに講義中に解説しました。任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立し，任意のベクトル $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^p$ に対し $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立します。よって任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^p$ に対し $f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = f(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ が成立する。よって AB が $f \circ g$ の表現行列である。講義中も言いましたが，**この定理が成立する様に行列の積を定義している**分けです。

演習問題 2.14　f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(f) < U$, $\mathrm{Ker}(f) < V$ を示せ。

$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。また $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ とスカラー a に対し $f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x}) = a\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $a\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。

$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0})$ より $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(f)$ となる。$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in U$ が存在して $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ となる。このとき $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')$ より $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}(f)$ となる。また $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ とスカラー a に対し $a\boldsymbol{y} = af(\boldsymbol{x}) = f(a\boldsymbol{x})$ より $a\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ となる。

演習問題 2.15　次の行列 A に対し f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ と像 $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

講義中に例を取り上げて説明しているのでここでは (1) のみ解説する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Ker}(f_A)$ の元である条件は $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので式に書くと，$y+z+w=0$, $z+w=0$, $w=0$, $0=0$ である。これより $y=z=w=0$ が従う。よって $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle|\ y=z=w=0 \right\}$ である。生成系で書くと $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(f_A)$ の元である条件はあるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる事である。式で書き下すと $X = y+z+w$, $Y = z+w$, $Z = w$, $W = 0$ となる。任意に与えられた X, Y, Z に対し $x = 0$, $y = X - Y$, $z = Y - Z$, $w = Z$ とおくと $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となるので $\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \middle|\ W = 0 \right\}$ である。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので $\mathrm{Im}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。 ∎

例 2.16 では

(1) $a \neq 0$ のとき同型，そうでない時は同型でない。

(2) $\alpha \neq 0$ のとき同型，そうでない時同型でない。

(3) f は同型写像になる。

(4) $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。ただしこの事実の証明は後回しとする。

演習問題 2.16　上の事実を証明せよ。

(1) $a \neq 0$ のとき $x, x' \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x) = f(x')$ とすると，$ax = ax'$ より $x = x'$ が分る。よって一対一写像である。任意の $y \in \boldsymbol{R}$ に対し $x = \dfrac{y}{a}$ とおくと $f(x) = y$ となるので上への写像である。よって同型写像。$a = 0$ のとき $f(1) = 0 = f(0)$ なので一対一でない。よって同型写像でない。
(2) も同様に示す事ができる。

(3) 任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $z = -x - y$ とおき $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x} \in U$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となるので f は全射である。また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in U$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ より $x = x'$ かつ $y = y'$ である。このとき $z = -x - y = -x' - y' = z'$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$，よって f は一対一写像である。
(4) $m = n$ かつ A が正則のとき同型写像である事を示す。それ以外の証明は後の章で行う。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}')$ とすると，$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ である左から A^{-1} をかける事により $A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}(A\boldsymbol{x}')$ を得るが $(A^{-1}A)\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ と変形する事により $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が分る。また任意の $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ とおくと $f(\boldsymbol{x}) = A(A^{-1}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ となる。よって f は同型写像になる。

演習問題 2.17　例 2.23 を証明せよ。

(1) $X, X' \in U$ に対し $T(X + X') = A(X + X') = AX + AX' = T(X) + T(X')$ が成立する。またスカラー a に対し $T(aX) = A(aX) = a(AX) = aT(X)$ が成立する。よって T は線型写像である。$S(X + X') = (X + X')A = XA + X'A = S(X) + S(X')$ 及び $S(aX) = (aX)A = a(XA) = aS(X)$ が成立するので S も線型写像である。

(2) $D(f + g) = D(f) + D(g)$ は $(f + g)' = f' + g'$ を $D(af) = aD(f)$ は $(af)' = af'$ を意味している。微分法の式よりこれらは成立する。
(3) $J(f + g) = \displaystyle\int_0^1 \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = J(f) + J(g)$，また $J(af) = \displaystyle\int_0^1 af(x)dx = a\int_0^1 f(x)dx = aJ(f)$ より J は線型写像である。

$K(f+g)(x) = \int_0^x \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_0^x f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = K(f)(x) + K(g)(x) = (K(f)+K(g))(x)$ なので $K(f+g) = K(f)+K(g)$ が成立する。$K(af)(x) = \int_0^x af(x)dx = a\int_0^x f(x)dx = aK(f)(x) = (aK(f))(x)$ なので $K(af) = aK(f)$ が成立する。
(4) **例の中にある W は U の間違いです。**(5) **も同様です。**$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\} \in V$ とする。$S(\boldsymbol{a}) = \{c_i\}, S(\boldsymbol{b}) = \{d_i\}$ と置くと $c_i = a_{i+1}, d_i = b_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が成立している。フィボナッチ数列の条件は $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$ が成立する事なのでこれより $a_{i+1} + a_{i+2} = a_{i+3}$ 即ち $c_i + c_{i+1} = c_{i+2}$ が得られ $S(\boldsymbol{a}) \in U$ が分る。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{a_i+b_i\}$ なので $S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \{e_i\}$ と置くと，$e_i = a_{i+1}+b_{i+1} = c_i+d_i$ なので $S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \{c_i+d_i\} = \{c_i\}+\{d_i\} = S(\boldsymbol{a})+S(\boldsymbol{b})$ が得られる。スカラー倍は省略。
(5) D が線型写像である事は (2) と同様に示す事ができる。よってここでは $D(y) \in U$ のみを示す。$y \in V$ のとき $y'' - y' - 2y = 0$ が成立している。両辺を x で微分すると $y''' - y'' - 2y' = 0$ を得るがこれは $D(y)'' - D(y)' - 2D(y) = 0$ を意味している。よって $D(y) \in U$ である。

演習問題 2.18　T を線型空間 V から U への線型写像，S を U から W への線型写像とすると S と T の合成写像 ST は V から W への線型写像であることを示せ。また，T が同型写像の時逆写像 T^{-1} も線型写像であることを示せ。

任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ に対し $S \circ T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = S(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')) = S(T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{x}')) = S(T(\boldsymbol{x}))+S(T(\boldsymbol{x}')) = S \circ T(\boldsymbol{x}) + S \circ T(\boldsymbol{x}')$ が成立する。また任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と任意のスカラー a に対し $S \circ T(a\boldsymbol{x}) = S(T(a\boldsymbol{x})) = S(aT(\boldsymbol{x})) = aS(T(\boldsymbol{x})) = aS \circ T(\boldsymbol{x})$ が成立するので $S \circ T$ も線型写像である。

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in U$ に対し $\boldsymbol{x} = T^{-1}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}' = T^{-1}(\boldsymbol{y}')$ とすると，$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = T(\boldsymbol{x}')$ となる。$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}') = T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')$ なので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = T^{-1}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')$ となる。よって $T^{-1}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = T(\boldsymbol{y})+T(\boldsymbol{y}')$ が成立する。また $a\boldsymbol{y} = aT(\boldsymbol{x}) = T(a\boldsymbol{x})$ より $a\boldsymbol{x} = T^{-1}(a\boldsymbol{y})$ となる。よって $T^{-1}(a\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} = aT^{-1}(\boldsymbol{x})$ となり T^{-1} は線型写像になる。