線形解析 I 問題解説 #9

河野

演習問題 2.19　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ただし a, b は各自の出席番号の下 2 桁と 1 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立という事は $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ という関係式から $a_1 = \cdots = a_k = 0$ が出てくる事を意味する。この式が $a_1 = \cdots = a_k = 0$ という解しか持たなければ 1 次独立，それ以外の解を持てば 1 次独立でない事になる。以上は定義の事実上の繰り返しですが重要な事実ですので，**しっかり理解しておいて下さい。**

(1) のみ示します。$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。この式から

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 4a_3 &= 0 \\ ba_3 &= 0 \\ 2a_1 + aa_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$b = 0$ の人と $b \neq 0$ の人で大きく違います。$b = 0$ の場合は $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 以外の解が存在します。例えば $a_1 = 4 - 4a, a_2 = 6, a_3 = a - 4$ は上の連立方程式の解になります。よってこのとき 1 次独立ではありません。

よって $b \neq 0$ と仮定します。このとき $a_3 = 0$ となるので $a_1.a_2$ が次を満たすものが解になる。

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 2a_1 + aa_2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで更に場合分け。$a = 4$ のときは例えば $a_1 = 2, a_2 = -1$ が解になるので 1 次独立ではない。$a \neq 4$ のときは $a_1 = a_2 = 0$ しか解がないので 1 次独立である。

演習問題 2.20　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ に対し，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立かどうか調べよ。

また $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1,$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

更に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

前問でも書きましたが $a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ から $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ が出てくれば 1 次独立です。それを調べていきます。最初は $a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + a_3(\boldsymbol{x}_1 +$

$\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)=(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{x}_1+(a_2+a_3)\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$ ですから，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ の 1 次独立性から $a_1+a_2+a_3=0, a_2+a_3=0, a_3=0$ が従う。これより $a_1=a_2=a_3=0$ が得られ $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立です。

2 番目では $a_1\boldsymbol{y}_1+a_2\boldsymbol{y}_2+a_3\boldsymbol{y}_3=a_1(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+a_2(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)+a_3(\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_1)=(a_1+a_3)\boldsymbol{x}_1+(a_1+a_2)\boldsymbol{x}_2+(a_2+a_3)\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$ なので $a_1+a_3=0, a_1+a_2=0, a_2+a_3=0$ が得られ，これより $a_1=A_2=A_3=0$ が従う。$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立。

3 番目は $a_1\boldsymbol{y}_1+a_2\boldsymbol{y}_2+a_3\boldsymbol{y}_3=a_1(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)+a_2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+a_3(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3)=(a_1-a_2+a_3)\boldsymbol{x}_1+(a_2-a_1)\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$ なので $a_1-a_2+a_3=0, a_2-a_1=0, a_3=0$ が分る。しかしこの場合は $a_3=0, a_1=a_2$ なら式を満たす。$a_1=a_2=1, a_3=0$ という解を持つので 1 次独立ではない。

演習問題 2.21　次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V=\boldsymbol{K}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$

(2) $V=\boldsymbol{K}^3$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(4) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, x-y+z+w=0\right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ がベクトル空間 V の基底であるとは，(1) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立，(2) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は V を生成する，の 2 つを満たす事をいいます。(1) は前問でも取り上げているのでここでの説明は省略。(2) は $V=\langle\,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\,\rangle$ という事実と同じです。具体的には任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in V$ に対しスカラー $a_1,\dots,a_n$ で $\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n$ となるものを見つければ良いわけです。

(3) のみ示します。まず 1 次独立；$a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ から $a=b=0$ が従うので OK。任意のベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V$ に対し $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ となる a,b を見つければよい。ここで予備的計算として,「もし存在していたとすると a,b はどのような数か」という事を調べると，与式より $x=a, b=y$ でなくてはならない。

任意のベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V$ を考える。V の定義より $x+y+z=0$ を満たしている。

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{v} \text{ となるので } V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

である。

演習問題 2.22　ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事と次は必要十分である。「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} > \subsetneq < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i >$ が成立する。ただし，$<>= \{\boldsymbol{0}\}$ とする。」

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であると仮定する。もし $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i \rangle$ とすると，$\boldsymbol{v}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle$ なのでスカラー $a_1, \ldots, a_{i-1}$ が存在して $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}$ と書ける。このとき $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i + 0\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ となるので，1 次独立性に矛盾。

「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} > \subsetneq < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i >$」を仮定する。$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ とする。このとき $a_n \neq 0$ とすると $\boldsymbol{v}_n = -\dfrac{a_1}{a_n}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\boldsymbol{v}_{n-1}$ となるので $\boldsymbol{v}_n \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle$。よって $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となり矛盾。故に $a_n = 0$ である。以下同様の議論で順に $a_{n-1} = 0, \ldots, a_1 = 0$ が分る。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である。

演習問題 2.23　次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x + 4y - z + w = 0 \right\}$

(6) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(7) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

次元とは基底を構成するベクトルの個数で定義されるので，自分で 1 つ基底候補を持ってきて，それが基底になる事を示せばよい。(1)–(5) から 1 題，(6)–(9) から 1 題証明する。

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$ は 3 項数ベクトルで条件式が 1 つなので 2 次元であろうとあたりをつける。なるべく簡単なベクトルが望ましいので 0 が多いベクトルを選ぼう。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶと $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ である。**ここで注意。V に属さないベクトルを選ばないように。それを選ぶと間違い発見が難しいかも。**あとは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が V の基底である事を前問同様に示せばよい。これが示されれば次元は 2 である事が分る。

(8) この場合は基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ の中から選ぶ事ができる。これらが V を生成する事は分かるのでこれらが 1 次独立ならそれが求めるものである。今の場合この 3 つのベクトルの組は 1 次独立でない。それは $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ から分る。$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立なので，これが基底になる事が分る (自分でチェックして下さい)。よって次元は 2 です。