線形解析 I 問題解説 #10

河野

演習問題 2.24　次の場合に $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

(1) $V=\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(2) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x-2y+z=0\right\}$, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$,

$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(3) $V=\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

この問題は φ_{E} の定義を理解しているかのチェックの問題です。次の解説が分からない人は定義をもう一度見て，例をやって下さい。(2) をやりましょう。

次元が 2 の場合は $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ となる事と $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ となる事は同じです。$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ に対し a,b が何になるかを計算します。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

なので $a=y, b=x-y$ となる。よって

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}y\\x-y\end{bmatrix}$$

となる。

演習問題 2.25　2 つの $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V,W に関して次元が等しければ V と W は同型である事を示せ。

V,W の次元を n とする。このとき V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,v_n$ と W の基底 $\boldsymbol{w}_1,\dots,w_n$ が存在する。$\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$, $\mathsf{F}=\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ とおく。このとき φ_{E} は V から $\boldsymbol{K}^n$ への同型写像であり，φ_{F} は W から $\boldsymbol{K}^n$ への同型写像である。このとき $f=\varphi_{\mathsf{F}}^{-1}\circ\varphi_{\mathsf{E}}$ は V から W への同型写像になる。

演習問題 2.26　次の線型写像 $f : V \to U$ に対し基底 E, F に関する表現行列を求めよ。

(1) $V = U = \boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \mathsf{E} = \mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

(2) $V = U = \boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \mathsf{E} = \mathsf{F} = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\}$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + y + z \right\}, \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ U = \boldsymbol{R}^2, \ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}, \mathsf{F} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + y + z \right\}, \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ U = \boldsymbol{R}^2, \ \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}, \mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$

これも表現行列の定義を理解しているかの確認問題です。次の解説が理解できない人は定義をもう一度きちんと見て理解して下さい。(4) のみ示します。定義から $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ です。$\varphi_{\mathsf{F}}(f(\boldsymbol{v}_1)) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\varphi_{\mathsf{F}}(f(\boldsymbol{v}_2)) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ とおくと，求める行列 A は $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ となります。これは A が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\varphi_{\mathsf{F}}(f(\boldsymbol{x})) = A\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})$ を満たすことから分かります。以下 a, b, c, d を求めます。$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので $\varphi_{\mathsf{F}}(f(\boldsymbol{v}_1)) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{f}_1 + b\boldsymbol{f}_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を意味します。よって $a = 0, b = 1$ となります。また $f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので $\varphi_{\mathsf{F}}(f(\boldsymbol{v}_2)) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c\boldsymbol{f}_1 + d\boldsymbol{f}_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を意味します。よって $c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{2}$ となります。よって求める行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となります。

演習問題 2.27　$w_1(x), w_2(x)$ が De(L) の基底である事を示せ。

w_1, w_2 の定義は p51 に書いてあります。まず 1 次独立：恒等的に $a_1w_1(x) + a_2w_2(x) = 0$ が成立しているとします。このとき $x = 0$ を代入すると，$a_1 + a_2 = 0$ を得ます。次に与えられた式

を微分した $a_1w_1'(x)+a_2w_2'(x)=0$ に $x=0$ を代入すると $a_1-a_2=0$ を得ます。この 2 式より $a_1=0, a_2=0$ が分かるので 1 次独立である。

次は生成 : De(L) の任意の元 y に対し実数 a, b が存在して $y=aw_1+bw_2$ と書ける事を示せばよい。予備的計算により $a=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2}, b=\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}$ が候補になると分かっているものとする。$w(x)=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2}w_1(x)+\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}w_2(x)$ とおくと，$y(x), w(x)$ は共に線型微分方程式の解関数で $y(0)=w(0), y'(0)=w'(0)$ が成立している。よって p46 定理 2.32 より $y=w$ が分かる。よって $y=aw_1+bw_2$ となる。以上により w_1, w_2 は基底である。

演習問題 2.28

(1) $V=M(2\,;\boldsymbol{K})$,$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $T(X)=AX$ とおく (例 2.5, 2.23 参照)。

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく時基底 $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ に関する T の表現行列を求めよ。

(2) (1) と同じく E をとる。$S(X)=XA$ の表現行列を求めよ。

(3) 例 2.23 のフィボナッチ数列全体がつくるベクトル空間上の線型写像 S について 2.5 節で定義した基底 $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関しての表現行列を求めよ。

この問題の解説はやめます。この問題にチャレンジしてできなかった人は直接私に質問に来て下さい。