線形解析 I 問題解説 #12

河野

演習問題 3.1　次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。またこの問題での $W(A)$ の基底を求めよ。

$$\begin{cases} 1x & + & 0y & + & 0z & + & 2v & + & 0w & = & 1 \\ 0x & + & 1y & + & 0z & + & 0v & + & 3w & = & 1 \\ 1x & + & 0y & + & 0z & + & 3v & + & 1w & = & 2 \\ 1x & + & 1y & + & 0z & + & 3v & + & 4w & = & a+3 \\ 1x & + & 2y & + & 0z & + & 7v & + & 0w & = & b+4 \end{cases}$$

解の存在に関しては連立 1 次方程式の解法の理論を用いる回答もあるし，方程式を基本変形していく方法もある。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ a+3 \\ b+4 \end{pmatrix}$ とおき，係数拡大行列を $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ とする。この行列を行基本変形して見やすい方程式にすればよい。少し変形を実行する。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$$ の 3 行目から 1 行目を引くと，$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & a+3 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$$

となる。以下この操作を続けて行けばよい。

この問題は私の記載ミスのため，あまり面白くない問題になっています。すいません。

演習問題 3.2　次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準形にせよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

これは基本変形を理解しているかをチェックする問題です。分からない人は基本変形の定義をもう一度復習して下さい。

基本変形の定義は分かっているのに最終的な形にできない人へ：(例えば堂々巡りをして元の形に戻ってしまう人など) 列の順番に行って行けば後戻りしません。最初に 1 列目を完全に処理します。2 列目以降は気にしないで 1 列目を $1, 0, 0, \cdots$ の形にします。そうしておけば 2 列目を処理しているとき 1 列目の形が崩れる事はありません。2 列目を $*, 1, 0, 0, \cdots$ (1 行目の数は何かは問題によります。そのまま似しておきます) の形にできたら 3 列目，以下順に行えばよいわけです。