線形解析 I 問題解説 #14

河野

演習問題 3.4　次の連立方程式が解を持つかどうか定理 3.11 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ。

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z + 1u + 1v + 2w = 1 \\ 1x + 2y + 2z + 2u + 3v + 3w = 2 \\ 1x + 1y + 2z + 3u + 2v + 3w = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5z = a + 3 \\ 3x + 2y + 3z + 4u + 3v + 5z = b + 3 \end{cases}$$

問題は定理 3.11 を用いてとなっていますが，用いなくても変形でできます。そちらでやってもかまいません。定理を用いた解答は：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ a+3 \\ b+3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ とおき，$\operatorname{rank} A$ と $\operatorname{rank} \widetilde{A}$ を計算すればよい。a, b に関する場合分けが必要となるが，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ となる条件を調べれば解を持つ条件が分かる。

解が存在するとき，解の次元は $6 - \operatorname{rank} A$ となる。パラメータ表示のパラメータの個数，及び基底を構成するベクトルの個数はこの数になる。パラメータ表示，基底を求めるには定理 3.11 は使えない。具体的に方程式を変形して行く必要がある。基本変形に対応する変形を行えば，パラメータ表示は自然に得られる。

演習問題 3.5　次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式の定義から計算してもよいが，基本変形を用いる方法の方が計算は楽であろう。行列

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

に**行基本変形**を行い，前半分を単位行列に変える。このとき後ろ部分が逆行列になっている。