

演習問題 3.6 次の連立方程式が解を持つかどうか定理 3.11 を用いて調べよ。解を持つときは解をパラメータ表示せよ。また $W(A)$ の基底を 1 組求めよ。

$$(1) \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y + z + w = a \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z + u + v = 1 \\ x + 2y + 3z + 4v = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5v = a \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y + 2z + u + 2v + w = 1 \\ x + 2y + z + 2u + v + 2w = 0 \\ x - y + z - u + v - w = a \\ x + y + z + u + v + w = b \end{cases}$$

(2) をパラメータ表示してみます。他は各自計算して下さい。この場合は解を持つ事が定理 3.11 より分かります。パラメータ表示のために式を変形して、 $x = 2a + z + 2v$, $y = -a - 2z - 3v$, $u = 1 - a$ を得ます。よってパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + z + 2v \\ -a - 2z - 3v \\ z \\ 1 - a \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 0 \\ 1 - a \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる。