線形解析 I 問題解説 #16

河野

演習問題 4.1　$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である事を示せ。

基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とする。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおき，性質 (1)–(3) を用いると $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_{11}a_{22}D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + a_{12}a_{21}D(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)$ となるので等式が証明される。

演習問題 4.2　命題 4.3，4.4 及び命題 4.5 を証明せよ。

行列式の性質から出て来る。命題 4.3 は (1)–1) のみ示そう。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ とおく。$\begin{vmatrix} x_1 + x_1' & y_1 \\ x_2 + x_2' & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1' & y_1 \\ x_2' & y_2 \end{vmatrix}$ が成立する事を確認しておく。

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 + x_2' & y_2 \\ x_3 + x_3' & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 + x_3' & y_3 \\ x_1 + x_1' & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & y_1 \\ x_2 + x_2' & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2' & y_2 \\ x_3' & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3' & y_3 \\ x_1' & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1' & y_1 \\ x_2' & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$$

となり，成立する。他も同様にできる。

命題 4.3 より $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は行列式が持つ 3 つの性質を同じ性質を持つ事から，補題 4.10 を用いれば命題 4.4 が分かる。

命題 4.5 は成分表示を用いて計算すればでてくる。このとき行列式の性質を用いて行列式の形のままで計算した方が計算が少し簡単かもしれない。