線形解析 I 問題解説 #17　　河野

演習問題 4.3　$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i < j)$ のとき $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ を示せ。

$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ より，$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ が成立している。この左辺を展開して行けば得られる。

演習問題 4.4　補題 4.10 の証明を完全なものにせよ。

解答は書かないことにしましょう。一般の場合が難しければ，$n = 2$ または 3，4 ぐらいで証明を試みるのも 1 つの方法かもしれません。それで具体的イメージがわけば，一般の場合の証明は難しくないと思います。

演習問題 4.5　テキストを参考にして定理 4.14 を証明せよ。

これ以降 3 問は**小さい字**の問題です。興味のある人は解答を試みて下さい。テキスト p90 に書いてある様な方法もありますが，ここでは次を紹介しておきましょう。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数として $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ とおく。ただし $\prod$ は条件を満たすものをすべて掛け合わせる記号である。例えば $n = 3$ のときは $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ となる。$\sigma \in S_n$ に対し (1) $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ となる。このことは互換の積の個数についての帰納法で示すことができる。また (2) σ が互換のとき $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ となる事も証明できる。以上により σ が互換偶数個の積なら $+1$，奇数個のせきなら -1 である事が分かる。符号は σ により決まるので，一方の表示では偶数，他方では奇数ということはない事が分かる。

演習問題 4.6　$n = 3$ の場合定義 4.15 を具体的に書き下せ。

これは定義を理解しているどうかの問題です。正しく理解していれば，結果はプリント p68 命題 4.1 の様になるはずです。

演習問題 4.7　ここで定義した $\det(A)$ が定義 4.7 の (1) 多重線型性,(2) 交代性,(3) 単位の値を満たす事を示せ (テキスト参照の事)。

最初に (1) を示す。$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1' = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1'' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}$ とし行列 A を 1 列目が $\boldsymbol{a}_1$ で 2 列目以降が $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ となる行列，A', A'' を 2 列目以降は A と同じで，1 列目が

それぞれ $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}''_1$ の行列とする。

$$\begin{aligned}
\det(A'') &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)} + a'_{1\sigma(1)})a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a'_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det(A) + \det(A')
\end{aligned}$$

他も同様に示すことができる。

交代性は 1 と 2 を入れ換えた場合のみ示す。1 と 2 を入れ換える互換を σ_0 とする。$\sigma_0(1) = 2, \sigma_0(2) = 1$ であり $i > 2$ に対しては $\sigma_0(i) = i$ である。$\sigma \in S_n$ に対し $\tau = \sigma\sigma_0$ とおくと $\tau \in S_n$ となっている。ここで積は合成写像で定義する。σ が s_n をすべて動くとき，τ も S_n をすべて動き重複はない。$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{2\sigma(1)}a_{1\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma\sigma_0(3)}\cdots a_{n\sigma\sigma_0(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma_0)\operatorname{sgn}(\sigma_0)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma\sigma_0(3)}\cdots a_{n\sigma\sigma_0(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_0)\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma_0)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma\sigma_0(3)}\cdots a_{n\sigma\sigma_0(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_0)\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\sigma_0)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma\sigma_0(3)}\cdots a_{n\sigma\sigma_0(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\sigma_0)a_{1\sigma\sigma_0(1)}a_{2\sigma\sigma_0(2)}a_{3\sigma\sigma_0(3)}\cdots a_{n\sigma\sigma_0(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)} \\
&= -\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)} \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

他の列に関しても同様にできる。

$A = E$ が単位行列のときは $a_{ij} = \delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ) となるので $i \neq j$ のとき $\delta_{ij} = 0$ である。σ が恒等写像 (すべての i に関し $\sigma(i) = i$ となる写像) でなければ $\sigma(i) \neq i$ となる番号 i が存在する。このとき $\delta_{1\sigma(1)}\cdots\delta_{n\sigma(n)}$ は 0 になる。残る項は σ が恒等写像の項のみで，この項は $\delta_{1\sigma(1)}\cdots\delta_{n\sigma(n)} = \delta_{11}\cdots\delta_{nn} = 1$ となるので $\det(E) = 1$ である。