線形解析 I 問題解説 #20

河野

演習問題 5.1 次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

この問題はできるようにしておいて下さい。この問題と次の問題は後期前半の 1 つの中心です。この問題ではスカラーが実数か複素数かという事は問題にしていないが，考えざるを得ない場合も出て来る。手順は，(1) 固有方程式を解いて，固有値を求める。(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求める。このとき固有値が固有方程式の重解ならば，その個数だけ 1 次独立なものを探す (ない場合もあります)，です。

(1) を解いてみよう。$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$\Phi(t\,;A) = \det(tE - A) = t^3 = 0$ なので固有方程式の解は $t = 0$ のみ。0 に属する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。$A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$ を満たしているので，これより $y = 0, z = 0$ を得る。この場合 0 は 3 重解ではあるが，1 次独立なベクトルは 1 個しか存在しない。一般には $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形をしているので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選択する。

演習問題 5.2 次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

対角化は前問解説で述べた (1)，(2) を行い，(2) の結果得られた 1 次独立なベクトルが行列のサイズ (今の問題の場合 3) だけなければ対角化不可能，存在すれば対角化可能で，固有ベクトルを並べた行列を P とすると，P が対角化を与える行列になっている。(1) を解いてみよう。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$\Phi(t\,;A) = \det(tE-A) = (t-4)(t-1)^2 = 0$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を

4 に属する A の固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ より，$2x+y+z = 4x, x+2y+z = 4y, x+y+2z = 4z$ を得るが，これを変形して $x = y = z$ を得る。$x = 1$ を選択して，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

次に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 に属する A の固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$ より $2x + y + z = x, x + 2y + z = y, x + y + 2z = z$ を得るが，これを変形して $x + y + z = 0$ を得る。この場合重解なので 1 次独立なベクトルを 2 個探す。条件式が 1 つなのでそれは可能で，例えば $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選択する。

$P = (\boldsymbol{x}_1\,\boldsymbol{x}_2\,\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。P^{-1} を求め，$P^{-1}AP$ を計算すると $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり，対角化ができた。

最後に一言注意：P が正しく求まっていれば，逆行列を求めなくても $P^{-1}AP$ は固有値を対角成分に並べた行列になるが，それまでの計算が正しい事の確認にもなるので，実際計算する事を推奨します。実際の問題では計算する事を要求する問題にしようと考えています。