線形解析 I 問題解説 #22

河野

演習問題 5.4　次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

同じタイプの問題が続いてますね。これは意識的にそうしました。でも (2) は私のミスです。前問と同じ行列ですね。理解確認の意味で全て解いてみて下さい。

演習問題 5.5　次の行列が対角化可能かどうか調べよ。ただし $\boldsymbol{K}$ は実数の場合と複素数の場合の 2 通りの場合を調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

ここでスカラーを何と考えるかで異なる問題が出て来ます。(1) を解いて見ましょう。

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。$\Phi(t\,;A) = t^2 - 2\cos\theta t + 1 = 0$ となるので特性解は $t = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$ である。

(1) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ のとき：　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。$\theta \neq 0$ かつ $\theta \neq \pi$ のとき特性解は実数ではないので固有値は存在しない。よって対角化もできない。$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき特性解は ± 1 で行列は $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ですでに対角行列になっている。

(1) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ のとき：　$e^{\pm i\theta}$ は A の固有値である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $e^{i\theta}$ に属する A の固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = e^{i\theta}\boldsymbol{x}$ より，$x = iy$ を得る。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ を選択する。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $e^{-i\theta}$ に属する A の固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = e^{-i\theta}\boldsymbol{x}$ より，$y = ix$ を得る。$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ を選択する。$P = (\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ と対角化できる。