線形解析 I 要綱 #2　　2003–4–15　　河野

1.2　3 次元ベクトル空間

この節では 3 次元ベクトルと 3 次元ベクトル空間について述べる。この概念は後に n 次元ベクトル空間へと拡張される。3 次元ベクトルは幾何的なものととらえる事もできるが，拡張されるとその様な見方はできなくなる。ベクトルに対し幾何学的なイメージを持つ事は重要であるが，概念が拡張されたときに，幾何学的イメージにとらわれず抽象的に考える事も重要である。

高校ではベクトル横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

と書いていたが，線型解析では 2 次元ベクトルと同様に通常縦**ベクトル** (*vector*) で

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書く。3 次元ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^3$ で表し，3 **次元ベクトル空間** (*3–dimensional vector space*) という。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が等しいとは $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ を意味し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と書く。

3 次元ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

で，また実数 α とベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し実数倍を

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。

ベクトルに対し，始点を原点に平行移動したものを考える。このときベクトルとベクトルの終点を対応させる事により，3 次元ベクトル空間の元であるベクトルと 3 次元ユークリッド空間の点が

一対一に対応する。この様に見たときベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶ。3 次元ベクトル空間を $\boldsymbol{R}^3$ という記号で書いたのも，この見方から来ている (更に付け加えて言えば，成分表示している事は，このユークリッド空間に直交座標を 1 つ固定して考えている事を意味する)。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 1.4 (1) [結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

(2) [交換法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(3) [零ベクトルの存在] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$

(4) [逆ベクトルの存在] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$

(5) [ベクトルに関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し
$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [実数倍に関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し
$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(7) [実数倍に関する結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し
$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [単位倍] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

証明 (1) のみ証明しよう (証明の細部の理解でなく，何故この様な事が必要なのかを理解するように)。ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とする。実数 a, b, c に対しては結合法則 $a+(b+c)=(a+b)+c$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は定義により $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ である。さらに定義により $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ (x_3+y_3)+z_3 \end{pmatrix}$ となる。同様に $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ は $\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ x_3+(y_3+z_3) \end{pmatrix}$ となる。実数の結合法則より，2 つのベクトルの各成分が等しいので $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成立する。 ∎

演習問題 1.3 命題 1.4 を証明せよ。

命題 1.1 及び命題 1.4 を基本的と言ったのは 2 つの理由がある。1 つはベクトルの諸々の性質はこの 8 つの性質から導かれる事である。成分表示の形を用いなくても，8 つの性質だけから示されるという点がポイントである。

演習問題 1.4 次を命題 1.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$
(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

成分表示を用いない証明を考えると，演習問題 1.2 と演習問題 1.4 は全く同じ証明になる事が分かるであろう。

3 次元ベクトルに対し内積を定義する。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し，その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

で定義する。

2 次元のベクトルの場合と同様に次の命題が成立する。

命題 1.5 ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成立する。

これを示すために次の命題を用いる。証明は容易なので演習問題としよう。

命題 1.6 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{R}^3$ と $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し次が成立する。
(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$
(2) $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$
(4) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
(6) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$

演習問題 1.5 命題 1.6 を証明せよ。

命題 1.5 の証明： $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を位置ベクトルと考え，それが表す点をそれぞれ A, B とする。3 角形 OAB(O は原点) を考える。$OA = |\boldsymbol{x}|$,$OB = |\boldsymbol{y}|$,$AB = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ なので，3 角形 OAB に余弦定理を適用すると，

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成立する。命題 1.6 より，$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, (-1)\boldsymbol{x}) + ((-1)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ((-1)\boldsymbol{x}, (-1)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる。よって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\theta$ が成立する。■

命題 1.5 の系として次が従う。ただしゼロベクトル $\mathbf{0}$ は任意のベクトルと直交するものとする。

系 1.7 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$

内積の 1 つの応用として空間内の平面の方程式を求めておこう。

命題 1.8 空間内の平面を P とすると，定数 a_1, a_2, a_3, b が存在して

$P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$ となる。逆に a_1, a_2, a_3 のどれかが 0 でなければ $P = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \right\}$ は平面を表す。

証明　ここではベクトルと空間の点を同一視して考える。P を空間内の平面とする。この平面に直交するベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とする。また P 上のベクトルを 1 つ固定し $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を平面上の任意の点とすると，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は平面上に乗っていると考えられるので $\boldsymbol{a}$ と直交している。よって $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立する。成分で書き直すと $a_1(x_1 - c_1) + a_2(x_2 - c_2) + a_3(x_3 - c_3) = 0$ となる。$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = b$ とおくと，$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ が成立している。

a_1, a_2, a_3 のどれかは 0 でないとする。今簡単のために $a_1 \neq 0$ として証明する ($a_2 \neq 0$ 等の場合も同様に示すことができる)。$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}_0 \in P$ である。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とおき，P の任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d$ となっている。$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0) = d$ なので，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0)$ がとなり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立している。よって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は直交しているので，P は $\boldsymbol{a}$ と直交する平面を表す。 ∎

ここで 3 次元ベクトルに対し**外積** (outer product) (または**ベクトル積** (vector product)) を定義する。外積は 3 次元ベクトルに対してのみ定義される。

定義 1.9 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$[1] と書く事にする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積という。

[1] これは後期に扱うが，2 次行列の行列式である。

命題 1.10 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と直交するする。また $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ の絶対値は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積であり，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ が右手系をなす。

証明　内積 $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ はそれぞれ 0 になるので $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{y}$ が分かる。

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積を S とすると，$S^2 = (|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta)^2$ より，$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2$ を得る。これを計算すると，
$S^2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$ で $|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|$ は平行 4 辺形の面積になる。

また $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$ より $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ が右手系をなす事が分かる。 ∎

命題 1.11 外積は次の性質を持つ写像と考えられる。

(1) [**多重線型性**]　$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y}$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $(\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}'$ に対し $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}'$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し $\boldsymbol{x}\times(\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$

(2) [**交代性**]　$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$

(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$

逆にこの 3 つの性質で外積は特徴付けられる。

命題 1.12 $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が右手系のときは $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が張る平行 6 面体の体積になる。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が左手系のときは，体積にマイナスをつけたものになる。

演習問題 1.6　命題 1.11，1.12 及びを証明せよ。