

1.3 部分空間

2次元ベクトル空間 R^2 または 3次元ベクトル空間 R^3 の空でない部分集合 W が和と実数倍に関して閉じているときその集合はそれ自身ベクトル空間と見ることができる。

定義 1.13 R^2 または R^3 の部分集合 W が次の 3つの条件を満たすとき W は R^3 の部分空間 (subspace) であるという。

- (1) $W \neq \emptyset$
- (2) 任意のベクトル $x, y \in W$ に対し $x + y \in W$
- (3) 任意のベクトル $x \in W$ と任意の実数 α に対し $\alpha x \in W$

命題 1.14 部分空間 W に対して命題 1.1 の 8つの性質が成立する。

証明 (3), (4) 以外は全体集合の R^3 で成立するので, その部分集合である W で成立する。

W は空集合でないので, W に属するベクトル x_0 が存在する。 $(-1)x_0$ も W に属し, $\mathbf{0} = x_0 + (-1)x_0$ も W に属する。

演習問題 1.2 より, $-x = (-1)x$ となるので W の任意のベクトル x に対し $-x$ も W に属する。 ■

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ とする。このとき W は定義 1.13 を満たしている。

(1) は例えば $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると, $1 + (-1) + 0 = 0$ なので条件を満たしており, $x \in W$ である。

(2) は W の任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $x + y \in W$ を示せばよい。 x, y は

W に属しているので $x_1 + x_2 + x_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0$ が成立している。 $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ であ

るが, $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0$ より成立が分かる。(3)

は W 任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α に対し $\alpha x \in W$ を示せばよい。 $x \in W$ より

$x_1+x_2+x_3=0$ である。 $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ なので $(\alpha x_1)+(\alpha x_2)+(\alpha x_3) = \alpha(x_1+x_2+x_3) = \alpha \cdot 0 = 0$

で成立している。

W が幾何的にはどのような集合になっているかを考える。平面上の直線の方程式は 1 次式であった。即ち $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\}$ は直線を表すし逆も成立した (ただし a_1, a_2 ともに 0 の場合を除く)。 $L \subseteq \mathbf{R}^2$ は一般に部分空間にはならないが, $b = 0$ のとき L は部分空間になる。

空間内の平面については前節で示したように $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$

は平面を表すし, 平面であれば上のような表示ができる (ただし a_1, a_2, a_3 ともに 0 の場合を除く)。

W の幾何的な状況の議論に戻ろう。上の事から W の元であるベクトルを位置ベクトルと考えると, 法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので, それと直交する方向の原点を通る平面上の点に対応する事が分かる。

演習問題 1.7 次の集合で部分空間になるものはどれか考えよ。

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$(2) W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

$$(3) W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

$$(4) W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

$$(5) W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3x_1 \right\}$$

$$(6) W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1x_2 = x_2x_3 \right\}$$

$$(7) W_7 = \mathbf{R}^3$$

$$(8) W_8 = \{\mathbf{0}\}$$

$V = \mathbf{R}^2$ または \mathbf{R}^3 とする。 V のベクトルを 1 つ固定する (それを x とする)。そのベクトルの実数倍でえられるベクトル全体の集合 $\{y \in \mathbf{R}^3 \mid y = \alpha x, \alpha \in \mathbf{R}\}$ を $\langle x \rangle$ で表す。このとき $\langle x \rangle$ は部分空間になる。2 つのベクトル x, y を固定する。そのベクトルの実数倍の和の形のベクトル全体の集合 $\{z \in \mathbf{R}^3 \mid z = ax + by, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ を $\langle x, y \rangle$ で表す。

一般にベクトル x_1, \dots, x_n が与えられたとき,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

の形のベクトルを x_1, \dots, x_n の 1 次結合 (linear combination) という。 x_1, \dots, x_n の 1 次結合全体の集合

$$W = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}\}$$

は部分空間になる (命題 1.15 参照)。これを x_1, \dots, x_n によって生成 (generate) される部分空間といい、 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ と書く。

具体例を考えよう。 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。このとき $\langle x \rangle$ はどのような集合だろう。 $\langle x \rangle$ の任意の

元 (ベクトル) y はある実数 α を用いて $y = \alpha x$ と書かれている。 y を位置ベクトルと考えると,

それが表す点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ は原点 O と点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を結ぶ直線上にある。

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき $\langle x, y \rangle$ はどのような集合だろう。 $\langle x, y \rangle$ の任意のベ

クトル z はある実数 a, b を用いて $z = ax + by$ と書かれている。 z を位置ベクトルと考えると, それを表す点 Q はベクトル x, y が張る平面上に乗っている。

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対しては $\langle x, y, z \rangle = \mathbf{R}^3$ となる。これを示そう。一

般に集合 A, B が等しいことを示すためには 1) $A \subseteq B$ 及び 2) $B \subseteq A$ を示せばよい。また $A \subseteq B$ を示すには A の任意の元 a が B に含まれる事を示せばよい。

$\langle x, y, z \rangle \subseteq \mathbf{R}^3$ は明らか⁽¹⁾。 \mathbf{R}^3 から任意にベクトル $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をとって来る。このとき

$$a = \frac{z-x}{2}, b = x+y-z, c = \frac{3x-z}{2} \text{ とおくと, } w = ax + by + cz \in W \text{ となるので OK.}$$

⁽¹⁾ 学生は解答において「明らか」という言葉を使用してはいけない (1 回の使用毎に 10 点減点!!)。数学では「明らか」=「私はその事実を簡単に証明できるが、ここでは書かない」という意味である。この他に使用してはいけない言葉として「題意より」がある。

上の例のように多くの場合 $\langle x \rangle$ は直線と、 $\langle x, y \rangle$ は平面と一対一対応がつく。しかし「退化している」場合もある (演習問題 1.8 参照)。

命題 1.15 $W = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ は部分空間になる。

証明 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを 0 とすると、 $\mathbf{0} = 0x_1 + \dots + x_n \in W$ なので、 $W \neq \emptyset$ である。

W から任意に 2 つのベクトル x, x' をとってくると、実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ が存在して $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x' = \alpha'_1 x_1 + \dots + \alpha'_n x_n$ と書ける。このとき

$$x + x' = (\alpha_1 + \alpha'_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + \alpha'_n)x_n$$

なので、 $x + x' \in W$ である。

W の任意のベクトル $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha x = (\alpha \alpha_1)x_1 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

なので $\alpha x \in W$ である。■

演習問題 1.8 次の部分空間で等しいものはどれか? ただし $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

- | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $\{\mathbf{0}\}$ | (2) $\langle x_0 \rangle$ | (3) $\langle x_1 \rangle$ |
| (4) $\langle x_1, x_2 \rangle$ | (5) $\langle x_2, x_3 \rangle$ | (6) $\langle x_1, x_4 \rangle$ |
| (7) $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ | (8) $\langle x_2, x_3, x_5 \rangle$ | (9) $\langle x_2, x_3, x_6 \rangle$ |
| (10) $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ | (11) \mathbf{R}^3 | |