

1.6 3 次行列

一般に実数を縦に m 行横に n 列長方形に並べたものを $m \times n$ 行列または (m, n) 行列という。 (n, n) 行列を n 次行列と呼ぶ。表すときは 2 重添え字を使って次の様を書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

つまり i 行 j 列の実数 (これを (i, j) 成分という) を a_{ij} で表す。

この節では 3×3 行列 (3 次行列) のみ扱う。3 次行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。以下この節では特に断らない限り, 行列といったら 3 次行列を表すものとする。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \text{ とおくととき, 行列 } A \text{ を}$$

$$A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$$

とも書き表す。

$$2 \text{ つの行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ に対しその和 } A + B \text{ を}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数倍は

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。また積は $AB = (c_{ij})$ とおくととき,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

と定義する。行列の積は全体を通じて基本的であるが、積を何故この様に定義するかはおいおい理解されるであろう。

3次元ベクトルを $(3, 1)$ 行列と考えることができる。このとき $(3, 3)$ 行列との積が定義できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

行列の和・積は実数の和・積と比べたとき、似ている性質もあるし異なる性質もある。

共通な性質として次があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (零行列と呼ばれる)、 E は単位行列と呼ばれる次の行列とする。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下零行列 O と単位行列 E は特に断らずに用いる場合も多い。2次の零行列, 単位行列と区別して表現したいときは O_3, E_3 という書き方をすることもある。

命題 1.26

- (1) 任意の A, B, C に対し $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (2) 任意の A, B に対し $A + B = B + A$
- (3) 任意の A に対し $A + O = A$
- (4) 任意の A, B, C に対し $(AB)C = A(BC)$
- (5) 任意の A に対し $AE = EA = A$
- (6) 任意の A, B, C に対し $A(B + C) = AB + AC$
- (7) 任意の A, B, C に対し $(A + B)C = AC + BC$

演習問題 1.18 命題 1.26 を示せ。

演習問題 1.19 行列の積と実数の積の違う点は大きく言って2つある。1つは交換法則 ($AB = BA$) が成立しない事, 2つは零因子 ($A \neq O, B \neq O$ で $AB = O$ となる行列, ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。

演習問題 1.20 次を計算せよ。ただし行列 A に対し $A^2 = AA, A^n = A^{n-1}A$ と帰納的に定義し, A^2 を A の2乗, A^3 を A の3乗, A^n を A のべき乗 (n 乗) という。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a, b は自分の在籍番号の下2桁。

(2) $i \geq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような行列 $A = (a_{ij})$ に対し A^3

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の2乗と3乗

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義する。このとき $E = (\delta_{ij})$ となる。3 次行列の場合はあまり意味がないようにみえるが、一般に n 次行列を考えるとこの記号は役に立つ。

2 つの行列 A, B に対し $AB = BA$ が成立するとき、 A と B は可換 (commutative) であるという。 αE の形をしている行列をスカラー行列という。スカラー行列は任意の行列と可換であるが、逆に任意の行列と可換な行列はスカラー行列に限る。

演習問題 (*)1.21 上の事実 (任意の行列と可換な行列はスカラー行列である) を証明せよ ((*) がついている問題は少し難しいかも)。

3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し、この行列を“対角線”で折り返してできる行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を A の転置行列 (transpose) といい A^T と表す。成分で表すと、 $A = (a_{ij})$ とする。 $a'_{ij} = a_{ji}$ とおくと、 (i, j) 成分が a'_{ij} である行列 (a'_{ij}) を A^T で表す。転置行列に対し次が成立する。

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (A^T)^T = A$$

演習問題 1.22 上記の事を証明せよ。

積に関しては次が成立する。積の順序が逆になっている事に注意。

命題 1.27 行列 A, B に対し $(AB)^T = B^T A^T$

証明 AB の (i, j) 成分 c_{ij} は

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

であった。よって $(AB)^T$ の (i, j) 成分は c_{ji} である。

また A^T, B^T の (i, j) 成分をそれぞれ a'_{ij}, b'_{ij} とすると、 $a'_{ij} = a_{ji}, b'_{ij} = b_{ji}$ である。 $B^T A^T$ の (i, j) 成分 d_{ij} は

$$d_{ij} = b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + b'_{i3}a'_{3j}$$

なので、 $d_{ij} = c_{ji}$ が分かる。

演習問題 1.23 行列 A が $A^T = A$ を満たすとき、即ち $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき、

任意の i, j について $a_{ij} = a_{ji}$ が成立するとき、 A を対称行列 (symmetric matrix) という。また $A^T = -A$ が成立するとき、つまり任意の i, j について $a_{ij} = -a_{ji}$ が成立するとき交代行列 (alternating matrix) という。このとき次を示せ。

(1) $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $A_a = \frac{1}{2}(A - A^T)$ とおくと、 A_s は対称行列、 A_a は交代である。

(2) $A = B + C$ と表されて、 B が対称、 C が交代行列のとき、 $B = A_s$, $C = A_a$ が成立する。

演習問題 1.24 対称行列 A, B に対し A と B が可換である事と AB が対称行列という事は同値である事を示せ。

また A, B が交代行列のときはどうなっているか調べよ。

行列 A に対し

$$AX = E \quad XA = E$$

となる行列 X が存在するとき、 A は可逆 (invertible) または正則 (non-singular) であるという⁽¹⁾。

命題 1.28 によりこの様な行列 $X(=Y)$ を A の逆行列 (inverse matrix) といい、 A^{-1} で表す。

命題 1.28 A が正則のとき上のような X は一意的である。即ち、 Y が $AY = E, YA = E$ を満たせば、 $X = Y$ である。

証明 $Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X$ 。

命題 1.29 A, B が正則な行列のとき、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 1.25 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

演習問題 1.26 A が正則のとき A^T も正則であり、 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ を示せ。

2 次行列の場合と同様に 3 次行列 A が逆行列を持つ条件を調べよう。一般の n については後期に扱うが、ここでは外積を用いた議論を紹介しておく (証明の多くは演習にまかせる)。

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくと

き、 A をベクトルを 3 つ並べたものと見て $A = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ と書く。このとき $\det(A) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z})$ を A の行列式 (determinant) と呼ぶ。

命題 1.30 $A = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ に対し

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{e}_1, \mathbf{z}) & (\mathbf{x} \times \mathbf{e}_2, \mathbf{z}) & (\mathbf{x} \times \mathbf{e}_3, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ 正則である条件はもう少し弱める事ができる；行列 A に対し $BA = E$ となる行列が存在するとき、 A が正則である事を示す事ができる。しかしこれを直接の計算で示す事は簡単ではない。後期にもう少し一般的な枠組みの中で証明する。

$$\text{とおくと } \tilde{A}A = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

演習問題 1.27 命題 1.30 を証明せよ。

定理 1.31 行列 A に対し命題 1.30 で定義された \tilde{A} を考える。このとき $A\tilde{A} = A\tilde{A} = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

である。特に $\det(A) \neq 0$ とのとき逆行列が存在して $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ である。

証明 今 $\det(A) \neq 0 \iff \det(\tilde{A}) \neq 0$ を仮定する⁽²⁾。この仮定の下で $\det(A) \neq 0$ のとき $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ が出て来る。 $\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}A = E_3$ は計算より出て来るので $A\frac{1}{\det(A)}\tilde{A} = E_3$ を示す。 \tilde{A} にこの定理を適用すると、 $\tilde{A}\tilde{A} = \det(\tilde{A})E_3$ が得られる。 $(\tilde{A}\tilde{A})A = \tilde{A}(\tilde{A}A)$ であるが、 $(\tilde{A}\tilde{A})A = \det(\tilde{A})E_3A = \det(\tilde{A})A$ 、 $\tilde{A}(\tilde{A}A) = \tilde{A}\det(A)E_3 = \det(A)\tilde{A}$ より $\frac{1}{\det(\tilde{A})}\tilde{A} = \frac{1}{\det(A)}A$ を得る。

$$A\frac{1}{\det(A)}\tilde{A} = \frac{1}{\det(\tilde{A})}\tilde{A}\tilde{A} = E_3 \quad \blacksquare$$

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し R^3 から R^3 への写像 T_A を $T_A(x) = Ax$ で定義する。

これは後で定義する線型写像 linear map の例になっている。即ち T_A は次の性質を持つ：

- (1) 任意のベクトル x, y に対し $T_A(x + y) = T_A(x) + T_A(y)$ が成立する。
 - (2) 任意のベクトル x と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha x) = \alpha T_A(x)$ が成立する。
- 2次元の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 1.32 3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に関して次は同値である。

- (1) 任意のベクトル x に対し $|T_A(x)| = |x|$ が成立する。
- (2) 任意のベクトル x, y に対し $(T_A(x), T_A(y)) = (x, y)$ が成立する。

(3) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$ とおくと、 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$

が成立する。

- (4)
- (5) $A^T A = E$ が成立する。

証明は 2次元の場合と同様なので演習問題とする。

演習問題 1.28 定理 1.32 を証明せよ。

⁽²⁾後で示すが $\det(\tilde{A}) = \det(A)^2$ が成立する。