線型解析 I 要綱 #6

2004–6–3　　河野

1.6　3 次行列

一般に実数を縦に m 行横に n 列長方形に並べたものを $m \times n$ 行列または (m,n) 行列という。(n,n) 行列を n 次行列と呼ぶ。表すときは 2 重添え字を使って次の様に書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

つまり i 行 j 列の実数 (これを (i,j) 成分という) を a_{ij} で表す。

この節では 3×3 行列 (3 次行列) のみ扱う。3 次行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。**以下この節では特に断らない限り，行列といったら 3 次行列を表すものとする。**

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくとき，行列 A を

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$$

とも書き表す。

2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対しその和 $A+B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数倍は

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。また積は $AB = (c_{ij})$ とおくとき，

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

と定義する。行列の積は全体を通じて基本的であるが，積を何故この様に定義するかはおいおい理解されるであろう。

3 次元ベクトルを $(3,1)$ 行列と考えることができる。このとき $(3,3)$ 行列との積が定義できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

行列の和・積は実数の和・積と比べたとき，似ている性質もあるし異なる性質もある。

共通な性質として次があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (零行列と呼ばれる)，E は単位行列と呼ばれる次の行列とする。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下零行列 O と単位行列 E は特に断らずに用いる場合も多い。2 次の零行列，単位行列と区別して表現したいときは O_3, E_3 という書き方をする事もある。

命題 1.26
(1) 任意の A, B, C に対し $(A+B)+C = A+(B+C)$
(2) 任意の A, B に対し $A+B = B+A$
(3) 任意の A に対し $A+O = A$
(4) 任意の A, B, C に対し $(AB)C = A(BC)$
(5) 任意の A に対し $AE = EA = A$
(6) 任意の A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$
(7) 任意の A, B, C に対し $(A+B)C = AC+BC$

演習問題 1.18　命題 1.26 を示せ。
演習問題 1.19　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 ($AB = BA$) が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。
演習問題 1.20　次を計算せよ。ただし行列 A に対し $A^2 = AA$, $A^n = A^{n-1}A$ と帰納的に定義し，A^2 を A の 2 乗，A^3 を A の 3 乗，A^n を A のべき乗 (n 乗) という。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a, b は自分の在籍番号の下 2 桁。

(2) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような行列 $A = (a_{ij})$ に対し A^3

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 2 乗と 3 乗

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義する。このとき $E = (\delta_{ij})$ となる。3 次行列の場合はあまり意味がないようにみえるが，一般に n 次行列を考えるときこの記号は役に立つ。

2 つの行列 A, B に対し $AB = BA$ が成立するとき，A と B は**可換** (*commutative*) であるという。αE の形をしている行列をスカラー行列という。スカラー行列は任意の行列と可換であるが，逆に任意の行列と可換な行列はスカラー行列に限る。

演習問題 $^{(*)}$1.21　上の事実 (任意の行列と可換な行列はスカラー行列である) を証明せよ ((*) がついている問題は少し難しいかも)。

3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，この行列を "対角線" で折り返してできる行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を A の**転置行列** (*transpose*) といい A^T と表す。成分で表すと，$A = (a_{ij})$ とする。$a'_{ij} = a_{ji}$ とおくとき，(i, j) 成分が a'_{ij} である行列 (a'_{ij}) を A^T で表す。転置行列に対し次が成立する。

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \qquad \left(A^T\right)^T = A$$

演習問題 1.22　上記の事を証明せよ。

積に関しては次が成立する。積の順序が逆になっている事に注意。

命題 1.27 行列 A, B に対し $(AB)^T = B^T A^T$

証明　AB の (i, j) 成分 c_{ij} は

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{j3}$$

であった。よって $(AB)^T$ の (i, j) 成分は c_{ji} である。

また A^T, B^T の (i, j) 成分をそれぞれ a'_{ij}, b'_{ij} とすると，$a'_{ij} = a_{ji}, b'_{ij} = b_{ji}$ である。$B^T A^T$ の (i, j) 成分 d_{ij} は

$$d_{ij} = b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + b'_{i3}a'_{3j}$$

なので，$d_{ij} = c_{ji}$ が分かる。

演習問題 1.23　行列 A が $A^T = A$ を満たすとき，即ち $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，任意の i, j について $a_{ij} = a_{ji}$ が成立するとき，A を**対称行列** (*symmetric matrix*) という。また $A^T = -A$ が成立するとき，つまり任意の i, j について $a_{ij} = -a_{ji}$ が成立するとき**交代行列** (*alternating matirx*) という。このとき次を示せ。

(1) $A_s = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$, $A_a = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ とおくとき，A_s は対称行列，A_a は交代である。

(2) $A = B + C$ と表されて，B が対称，C が交代行列のとき，$B = A_s$, $C = A_a$ が成立する。

演習問題 1.24　対称行列 A, B に対し A と B が可換である事と AB が対称行列という事は同値である事を示せ。

また A, B が交代行列のときはどうなっているか調べよ。

行列 A に対し

$$AX = E \qquad XA = E$$

となる行列 X が存在するとき，A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*non–singular*) であるという[1]。命題 1.28 によりこの様な行列 $X(= Y)$ を A の**逆行列** (*inverse matrix*) といい，A^{-1} で表す。

命題 1.28 A が正則のとき上のような X は一意的である。即ち，Y が $AY = E, YA = E$ を満たせば，$X = Y$ である。

証明　$Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X$。

命題 1.29 A,B が正則な行列のとき，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 1.25　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

演習問題 1.26　A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

2 次行列の場合と同様に 3 次行列 A が逆行列を持つ条件を調べよう。一般の n については後期に扱うが，ここでは外積を用いた議論を紹介しておく (証明の多くは演習にまかせる)。

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくとき，A をベクトルを 3 つ並べたものと見て $A = (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z})$ と書く。このとき $\det(A) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を A の**行列式** (*determinant*) と呼ぶ。

命題 1.30 $A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に対し

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

[1] 正則である条件はもう少し弱める事ができる；行列 A に対し $BA = E$ となる行列が存在するとき，A が正則である事を示す事ができる。しかしこれを直接の計算で示す事は簡単ではない。後期にもう少し一般的な枠組みの中で証明する。

とおくと $\widetilde{A}A=\det(A)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

演習問題 1.27　命題 1.30 を証明せよ。

定理 1.31 行列 A に対し命題 1.30 で定義された $\widetilde{A}$ を考える。このとき $A\widetilde{A}=A\widetilde{A}=\det(A)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ である。特に $\det(A)\neq 0$ とのとき逆行列が存在して $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ である。

証明　今 $\det(A)\neq 0 \iff \det(\widetilde{A})\neq 0$ を仮定する[(2)]。この仮定の下で $\det(A)\neq 0$ のとき $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ が出て来る。$\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}A=E_3$ は計算より出て来るので $A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}=E_3$ を示す。$\widetilde{A}$ にこの定理を適用すると，$\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A}=\det(\widetilde{A})E_3$ が得られる。$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A=\widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A)$ であるが，$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A=\det(\widetilde{A})E_3A=\det(\widetilde{A})A$, $\widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A)=\widetilde{\widetilde{A}}\det(A)E_3=\det(A)\widetilde{\widetilde{A}}$ より $\dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}}=\dfrac{1}{\det(A)}A$ を得る。$A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}=\dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A}=E_3$ ∎

行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定義する。これは後で定義する**線型写像** linear map の例になっている。即ち T_A は次の性質を持つ：

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T_A(\boldsymbol{x})+T_A(\boldsymbol{y})$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $T_A(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha T_A(\boldsymbol{x})$ が成立する。

2 次元の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 1.32 3 行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ に関して次は同値である。

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{x}|$ が成立する。
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成立する。
(3) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$, $A=(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3)$ とおくとき，$(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}$ が成立する。
(4)
(5) $A^TA=E$ が成立する。

証明は 2 次元の場合と同様なので演習問題とする。

演習問題 1.28　定理 1.32 を証明せよ。

[(2)]後で示すが $\det(\widetilde{A})=\det(A)^2$ が成立する。