線形解析 I 要綱 #7

2004–6–10　　河野

1.7　線型写像

定義 1.33 U, V を $\boldsymbol{R}^3$ または $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間とする。U から V への写像 T **線型写像** (*linear map*) であるとは次の 2 つの条件を満たす事である。
(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の実数 α に対し $T(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$ が成立する。

命題 1.34 $T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。このとき $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $T(-\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立する。

証明　$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $T(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = T(\boldsymbol{0})$ が成立する。T が線型写像という事から $T(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = T(\boldsymbol{0})+T(\boldsymbol{0})$ なので，$T(\boldsymbol{0}) + T(\boldsymbol{0}) = T(\boldsymbol{0})$ の両辺から $T(\boldsymbol{0})$ を引くと $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を得る。

$(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ 及び $(-1)T(\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ が成立しているので，$T(-\boldsymbol{x}) = T((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)T(\boldsymbol{x}) = -T(\boldsymbol{x})$ となる。∎

命題 1.35 $T : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \mid\ T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}$, $\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid\ \boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U \,\}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ は部分空間である。$\mathrm{Ker}(T)$ を線型写像 T の**核** (*kernel*)，$\mathrm{Im}(T)$ を線型写像 T の**像** (*image*) という。

証明　W が部分空間であるためには W が，(1) 空集合でない，(2) W の任意のベクトルの和がまた W に含まれる，(3) W の任意のベクトルの任意の実数倍がまた W に含まれる，の 3 つの性質を持てばよかった。それぞれについてチェックすればよい。

まず最初に $\mathrm{Ker}(T)$ について：(1) $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(T)$ である。よって $\mathrm{Ker}(T) \neq \emptyset$ である。(2) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の任意のベクトルとすると，$T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が成立している。このとき $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ が分かる。(3) $\boldsymbol{u}$ を $\ker(T)$ の任意のベクトル，α を任意の実数とする。$T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ より，$T(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となり，$\alpha\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(T)$ が分かる。

次に $\mathrm{Im}(T)$ について：(1) $\boldsymbol{0} \in U$ なので $T(\boldsymbol{0}) \in \mathrm{Im}(T)$ であるが，$T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(T)$ である。(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の任意のベクトルとする。定義より U のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が存在して，$\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{v})$ となる。$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in U$ であり，$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ となるので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(T)$ となる。(3) $\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の任意のベクトル，α を任意の実数とする。ある U のベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在して $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{u})$ となる。このとき $T(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{x}$ となるので，$\alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(T)$ となる。∎

例 1.36 3 次行列 A に対し $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T_A は線型写像であった。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。この行列 A に対し $\mathrm{Ker}(T_A)$ と $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めてみよう。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即ち $y + 2z = 0,\ x + 2y + 3z = 0,\ 2x + 3y + 4z = 0$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

が成立しなければならない。この式達より $x-z=0,\ x+y+z=0$ を得る。逆にこの条件のとき $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T_A)$ となる。

よって

$$\mathrm{Ker}(T_A)=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\ \middle|\ x-z=0,x+y+z=0\right\}$$

となる。$\mathrm{Ker}(T_A)$ を生成元を用いて書き表す事もできる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を $\mathrm{Ker}(T_A)$ の任意の元とする。このとき $z=x,y=-x-z=-2x$ なので $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-2x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ となる。逆に任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ に対し $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ とすると，$x_1=\alpha,x_2=-2\alpha,x_3=\alpha$ となるので，$x_1-x_3=0,x_1+x_2+x_3=0$ を満たし $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}(T_A)$ が分かる。よって $\mathrm{Ker}(T_A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ となる。

$\boldsymbol{y}\in\mathrm{Im}(T_A)$ のとき，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ が存在して $\boldsymbol{y}=T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と書ける。

$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ なので，

$$A\boldsymbol{x}=x\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=(x-z)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+(y+2z)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $\boldsymbol{y}=p\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ の元に対し $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}p\\q\\0\end{pmatrix}$ と置くと $\boldsymbol{y}=T_A(\boldsymbol{x})$ なので，$\boldsymbol{y}\in\mathrm{Im}(T_A)$ である。

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^3\ \middle|\ \boldsymbol{y}=p\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},p,q\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

となる。

$\mathrm{Im}(T_A)$ を生成元を用いないで表す書き方もある。$W=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1-2x_2+x_3=0\right\}$

とおく。任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ に対し $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と書けるので，$x=q, y=p+2q, z=2p+3q$ が成立している。このとき $x-2y+z=q-2(p+2q)+2p+3q=0$ となるので，$\boldsymbol{x}\in W$ となり，$\mathrm{Im}(T_A)\subseteq W$ が成立している。逆に任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in W$ に対し $(x_2-2x_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_2-4x_1+3x_1 \end{pmatrix}$ において $x_3=2x_2-x_1$ を用いると $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(x_2-2x_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ となり $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Im}(T_A)$ が成立する。よって $W\subseteq\mathrm{Im}(T_A)$ となる。以上により $\mathrm{Im}(T_A)=W=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\,\middle|\, x-2y+z=0\right\}$ となる。

演習問題 1.29　次の行列で表現される線型写像 T_A に対し $\mathrm{Ker}(T_A)$ 及び $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

演習問題 1.30　U, V, W を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。$T: U \longrightarrow V$, $S: V \longrightarrow W$ を線型写像とすると，合成写像 $S\circ T$ も線型写像であることを示せ。

$T: U \longrightarrow V$ が上への 1 対 1 写像であるとき，逆写像 T^{-1} も線型写像である事を示せ。

命題 1.37 $T: \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を線形写像とする。このとき 3 次行列 A が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $T(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ が成立する。この行列 A を線型写像 T の表現行列という。

$T: \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $S: \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を線形写像とする。A を T の，B を S の表現行列とする。このとき BA は $S\circ T$ の表現行列である。

証明　$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする，即ち $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}=T(\boldsymbol{e}_1), \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}=T(\boldsymbol{e}_2), \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=T(\boldsymbol{e}_3)$ とおき，$A=(a_{ij})$ とおく。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ が成立する事を示す。$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ と表す事ができるので，$T(\boldsymbol{x})=T(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3)=T(x\boldsymbol{e}_1)+T(y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3)=T(x\boldsymbol{e}_1)+T(y\boldsymbol{e}_2)+T(z\boldsymbol{e}_3)=$

$$xT(\boldsymbol{e}_1)+yT(\boldsymbol{e}_2)+zT(\boldsymbol{e}_3)=x\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

となる。

T の表現行列を A とすると任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ が成立する。S の表現行列を B とすると任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $S(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$ が成立する。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $(BA)\boldsymbol{x}=B(A\boldsymbol{x})=S(A\boldsymbol{x})=S(T(\boldsymbol{x}))=(S\circ T)(\boldsymbol{x})$ となる。∎

例 1.38 写像 T を z 軸に関する θ 回転とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が張る平行 4 辺形の対角線で与えられるベクトルが $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ である。この平行 4 辺形を θ 回転させて得られる平行 4 辺形は $T(\boldsymbol{u})$ と $T(\boldsymbol{v})$ によって張られている。この対角線は $T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})$ であるが，これは $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ を θ 回転させた $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ である。よって $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})$ が得られる。同様に $T(\alpha\boldsymbol{v})=\alpha T(\boldsymbol{v})$ が分かる。T は線型写像である。

T を表現する行列を $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を T で写したものは $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ を T で写したものは $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を T で写したものは $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ である。$T(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$, $T(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$, $T(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ なので

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

が分かる。

演習問題 ***1.31** $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ。