

2.2 (m, n) 行列

一般の行列について考えよう。各成分は K の元とする。 m 行 n 列の行列 ((m, n) 行列, $m \times n$ 行列ともいう) A を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書こう行列 A を (a_{ij}) とも書く。慣れればこの方が簡単である。2つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が等しい事をもと同じ型 ((m, n) タイプ) の行列であり, 任意の i, j に対し $a_{ij} = b_{ij}$ が成立する事で定義する。

(m, n) 行列全体の集合を $M(m, n; K)$ で表す。 $M(m, n; K)$ には和とスカラー倍が次の様に定義できる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m, n; K), \alpha \in K \text{ に対し和, スカ}$$

ラー倍を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & a_{ij} + b_{ij} & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する。和とスカラー倍は (a_{ij}) の記号で書くと

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

と書ける。とくに $m = n$ の時 $M(n; K)$ とも書き, その元を n 次 (正方) 行列と言う。 K が明らかなきは省略して, $M(n), M(m, n)$ と書く場合もある。

ここで行列の積について復習しておこう。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m, n; K), B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \in M(n, p; K) \text{ に対し}$$

その積 $AB = (c_{ij})$ は

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

と定義されていた。定義から分るように積 AB は (m, p) 行列になる。行列の積は全体を通じて基本的である。特に 2 重添字を用いての掛け算が自由にできるようになる事を 1 つの目標として各自取り組んでほしい (演習問題 2.7 参照)。

演習問題 2.5 [行列の計算練習] 次を計算せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ここで実数の 1 に対応する単位行列についてふれておく。クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義した時, n 次行列 E_n を $E_n = (\delta_{ij})^{(1)}$ と定義すると次が成立する。

命題 2.7 (m, n) 行列 A に対し

$$E_m A = A E_n = A$$

が成立する。特に n 次正方行列 A に対しては

$$E_n A = A E_n = A$$

が成立する。

命題 2.7 より単位行列 E は実数の積における 1 の役割を果たす事が分る。実数の 0 に対応するのが零行列 O (すべての成分が 0 の行列) である。

演習問題 2.6 行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 ($AB = BA$) が成立しない事, 2 つは零因子 ($A \neq O, B \neq O$ で $AB = O$ となる行列, ただし O は零行列) の存在である。4 次の行列についてそれぞれ例をあげよ。

演習問題 2.7 2 重添字に慣れるための問題

(1) 命題 2.7 を示せ

(2) 行列の積に関し分配法則 ($A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$) と結合法則 ($(AB)C = A(BC)$) が成立することを示せ。

⁽¹⁾ 次数 n が明らかな場合は E と書く。

(3) 行列 $A = (a_{ij})$ に対し $B = (b_{ij})$ を $b_{ij} = a_{ji}$ で定めた時, B を A の転置行列といい $B = A^T$ と表す。この時 $(AB)^T = B^T A^T$ を示せ。

(4) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n = O$ (零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(5) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。 ($n = 2, 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(6) $i \geq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $A^n = O$ (零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

定義 2.8 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し n 次正方行列 X が存在して

$$AX = E_n \quad XA = E_n$$

となる時 X を A の逆行列 (inverse matrix) という。またこのとき A は可逆 (invertible) または正則 (non-singular) であるという。

3 次行列の場合と同様に $AX = E_n$ または $XA = E_n$ の一方が成立すれば X が逆行列である事が分かるが, この事実は後で行列式の所で証明する。

命題 2.9 A, B が正則な行列のとき AB も正則で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 2.8 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

演習問題 2.9 A が正則のとき A^T も正則であり, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ を示せ。

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ を n 個の m 次元ベクトルの組で表すと便利ことがある。各 j ($j = 1, \dots, n$) に対し $\mathbf{a}_j = (a_{ij})$ とおくと, $A = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n)$ と表す事ができる。 (n, p) 行列 $B = (b_{ij})$ に対し $\mathbf{b}_j = (b_{ij})$ ($j = 1, \dots, p$) とおくと, $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p)$ であるが, $AB = A(\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p) = (A\mathbf{b}_1 \dots A\mathbf{b}_p)$ が成立する。