線形解析 I 問題解説 #2

河野

演習問題 1.3　命題 1.4 を証明せよ。

成分が 2 個から 3 個に変わっただけで，命題 1.1 の証明と同様である。(5) のみ示しておきましょう。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ なので $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \alpha(x_2+y_2) \\ \alpha(x_3+y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha x_2+\alpha y_2 \\ \alpha x_3+\alpha y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha y_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ となり (5) は成立している。

演習問題 1.4　次を命題 1.4 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

問題文にミスがありました。「命題 1.1 から」ではなく,「命題 1.4 から」です。

成分表示を用いないので，解答は見かけ上は演習問題 1.2 の解答とまったく同じです。

演習問題 1.5　1.6 を証明せよ。

定義に従って計算していけば得られます。ここでは (1) のみ示しておきます。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \\ x_3+x_3' \end{pmatrix}$ なので，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (x_1+x_1')y_1 + (x_2+x_2')y_2 + (x_3+x_3')y_3 = (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) + (x_1'y_1+x_2'y_2+x_3'y_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ となり, (1) が成立する。

演習問題 1.6　命題 1.11 及び 1.12 を証明せよ。

命題 1.11 は定義に従って計算していけばでます。ここでは (2) 交代性を示しておく。最初に

$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ が成立する事に注意しておく。

$$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} - \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$

次は命題 1.12。平行 6 面体の体積は (底面積)×(高さ) である。(底面積)= $|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平面と $\boldsymbol{z}$ のなす角を α とすると (高さ)= $|\boldsymbol{z}|\sin\alpha$ となる。$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は先ほどの平面と直交しているので，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ のなす角を θ とおくと $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ となっている。$\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ より $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{z}|\cos\theta$ となるので，命題 1.12 が正負の部分を除いて示された。

右手系のとき正，左手系のとき負になる事を示すのは困難性がある。その困難性は右手系・左手系のここでの定義が直観に訴えたものであるという点にある。右ネジというものを知っている人には「定義」に見えるかもしれないが，右ネジ自身は数学的には定義していない。数学的定義は通常 $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) > 0$ なら右手系とするので，これを定義に採用すると右手系・左手系の部分は定義となる。それでは不満な人に発展的問題を提起しておこう。

> 「右ネジ」の概念をきちんと定義し，それを用いて右手系・左手系を定義せよ。それをもとに命題 1.12 の残りの部分を証明せよ。