線形解析 I 問題解説 #3

河野

演習問題 1.7　次の集合で部分空間になるものはどれか考えよ。

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

(3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $W_7 = \boldsymbol{R}^3$

(8) $W_8 = \{\boldsymbol{0}\}$

(1)(2) のみ示して残りは各自にまかせます。W が部分空間になるためには
(1) $W \neq \emptyset$
(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$
の 3 つの条件が成立している事を示す必要がある。W が部分空間でない事を示すためには，上の否定だから (1)，(2)，(3) のどれか 1 つでも成立しないものがあればよい。念のために書いておくと (2) の否定は「あるベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ が存在して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin W$」，(3) の否定は「あるベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ とある実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ が存在して $\alpha\boldsymbol{x} \notin W$」となる。最初は W_1 が部分空間である事を示す。

(1) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$0 - 0 + 0 = 0$ なので，$\boldsymbol{0} \in W_1$ である。よって $W_1 \neq \emptyset$ である。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\in W_1$ について，$x_1-x_2+x_3=0, y_1-y_2+y_3=0$ が成立する。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ となるが，$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3)=0+0=0$ となるので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_1$ である。

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in W_1$ と任意のスカラー $\alpha\in\boldsymbol{K}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ となるが，$(\alpha x_1)-(\alpha x_2)+(\alpha x_3)=\alpha(x_1-x_2+x_3)=\alpha 0=0$ となるので，$\alpha\boldsymbol{x}\in W_1$ である。以上により W_1 は部分空間となる。

次に W_2 が部分空間にならない事を示す。そのためには (1)，(2)，(3) のいずれかが成立しない事を示せばよい。(1) は成立するが，(2)，(3) は成立しない。ここでは (2) の不成立を示す。(2) の不成立をいうためには $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in W_2$ で $\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\notin W_2$ となるベクトルが存在する事を示せばよい。$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in W_2$ である。$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので $1-0+1=2\neq 1$ となり，$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\notin W_2$ が分かる。

演習問題 1.8　次の部分空間で等しいものはどれか?　ただし $\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_6=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\{\boldsymbol{0}\}$　(2) $\langle\,\boldsymbol{x}_0\,\rangle$　(3) $\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$
(4) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\,\rangle$　(5) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$　(6) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$
(7) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$　(8) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle$　(9) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_6\,\rangle$
(10) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$　(11) $\boldsymbol{R}^3$

証明は各自にまかせるが，次の事は再確認しておこう。

(1) $A\subseteq B$ を示すためには「任意の $a\in A$ に対し $a\in B$ が成立する」を示せばよい。
(2) $A=B$ を示すためには「$A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$」を示せばよい。
(3) $A\subsetneq B$ を示すには $A\subseteq B$ を示し，更にある元 $b\in B$ で $b\notin A$ となるものが存在する事を言えばよい。
(4) $\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle, \langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle\subseteq\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\,\rangle$ 等の関係が成立している。
(5) 部分空間 W に対し，$\boldsymbol{v}_1\in W$ ならば $\langle\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle\subseteq W$，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in W$ ならば $\langle\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\,\rangle\subseteq W$ 等が成立する。

1 つだけ示しておこう。$\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle=\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle$ が成立する。
$\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle$ は明らかなので $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle\subseteq\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\in\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$

は成立する。また $\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ なので $\boldsymbol{x}_5 \in \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ となる。
よって $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が成立する。