線形解析 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.9　次の部分空間で等しいものはどれか?　ただし $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_8 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $W_1 = \{\boldsymbol{0}\}$
(2) $W_2 = \langle\, \boldsymbol{x}_0 \,\rangle$
(3) $W_3 = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$
(4) $W_4 = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$
(5) $W_5 = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_5 \,\rangle$
(6) $W_6 = \langle\, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5 \,\rangle$
(7) $W_7 = \langle\, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6 \,\rangle$
(8) $W_8 = \langle\, \boldsymbol{x}_7 \,\rangle$
(9) $W_9 = \langle\, \boldsymbol{x}_8 \,\rangle$
(10) $W_{10} = \langle\, \boldsymbol{x}_7, \boldsymbol{x}_8 \,\rangle$
(11) $W_{11} = \langle\, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_7, \boldsymbol{x}_8 \,\rangle$
(12) $W_{12} = \boldsymbol{R}^3$

(13) $W_{13} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(14) $W_{14} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(15) $W_{15} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(16) $W_{16} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0.x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0 \right\}$

「生成」という概念と「集合が等しい事を示すためには何をすればよいか」がわかっていればできる。ここでは幾つかをしめしておく。

(1) $W_3 = W_4$ **である：** $\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle$ は成立するので，逆の包含関係 $\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \,\rangle \subseteq \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ を示す。そのためには $\boldsymbol{x}_3 \in \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ を示せばよい。$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + (-1)\boldsymbol{x}_2$ なので，$\boldsymbol{x}_3 \in \langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle$ が成立する。

(2) $W_3 = W_{13}$ **である：** $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_{13}$ なので $\langle\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \,\rangle \subseteq W_{13}$ は成立している。逆を示すために，予備的計算を行う。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W_{13}$ が $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と書か

れていると仮定する。このとき $a_1 = x_2, a_2 = -x_3$ が分かる。予備的計算を終り証明を再開する。任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W_{13}$ に対し $x_2\boldsymbol{x}_1 + (-x_3)\boldsymbol{x}_2$ を計算する。計算途中で $\boldsymbol{x} \in W_{13}$ となる条件 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ を使用する。

$$\begin{aligned} x_2\boldsymbol{x}_1 + (-x_3)\boldsymbol{x}_2 &= x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が分かる。
(3) $W_{13} \neq W_{12}$ **である：** $W_{13} \subseteq W_{12}$ は明らかなので $W_{12} \subseteq W_{13}$ が成立しないはずである。そのために $W_{12} \subseteq W_{13}$ を仮定して矛盾を導く (**背理法**)。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} \in W_{12} = \boldsymbol{R}^3$ なので，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} \in W_{13}$ が成立する。特に $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して実数 a_1, a_2 が存在して $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。これより

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 + a_2 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= -a_2 \end{aligned}$$

が従い，$0 = 1$ が出て来る。これは矛盾。

演習問題 1.10　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$　　(a は定数)

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(6) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

(6) のみ示しておこう。p, q の値に依存すると思われるので，途中場合分けが必要になると思われる。$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + pa_3 &= 0 \\ 3a_1 + qa_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。2 式から 1 式の 2 倍を引くと $(p-2)a_3 = 0$ が得られる。同様に 3 式から 1 式の 3 倍を引くと $(q-3)a_2 = 0$ を得る。ここで (1)$p \neq 2$ かつ $q \neq 3$，(2)$p = 2$, (3)$q = 3$, の 3 つの場合に分けて考える。

(1) $(p-2)a_3 = 0$,$(q-3)a_2 = 0$ より $a_3 = a_2 = 0$ を得る。1 式に代入して $a_1 = 0$ となり，この場合 1 次独立である事が分かる。

(2) $p = 2$ のとき，例えば $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$ とおくと 3 つの式は満たされる。よって 1 次独立ではない。

(3) $q = 3$ のとき，例えば $a_1 = 1$,$a_2 = -1$,$a_3 = 0$ とおくと 3 つの式とも満たされる。よって 1 次独立ではない。

以上により $p = 2$ または $q = 3$ のとき 1 次独立ではなく，$p \neq 2$ かつ $q \neq 3$ のとき 1 次独立である。

演習問題 1.11　次のベクトルの組が W の基底である事を示せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W = \boldsymbol{R}^3$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, W = \boldsymbol{R}^3$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0, x - 2y + z = 0 \right\}$

(1) のみ示しておく。

(a) $a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned}a_1+a_2&=0\\a_1+a_3&=0\\a_1+a_2+a_3&=0\end{aligned}$$

が成立している。3 式から 1 式を引くと $a_3=0$ を得る。これを 2 式に代入して $a_1=0$ を得る。これを 1 式に代入して $a_2=0$ を得る。以上により $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である。

(b) $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\boldsymbol{R}^3$ を示す。$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\subseteq\boldsymbol{R}^3$ は明らかなので，逆の包含関係を示す。予備的考察として $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

が成立しているとする。このとき連立方程式を計算して (計算過程は省略)，$a_1=a_1+x_2-x_3$, $a_2=x_3-x_2$, $a_3=x_3-x_1$ を得る。予備的考察を終えて証明に戻る。任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2-x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(x_3-x_2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(x_3-x_1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}x_1+x_2-x_3\\x_1+x_2-x_3\\x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3-x_2\\0\\x_3-x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x_3-x_1\\x_3-x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ となり，$\boldsymbol{R}^3\subseteq\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ が分かる。

演習問題 1.12　次の部分空間の基底を 1 組求め，次元を求めよ。

(1) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+5x_2+x_3=0 \right\}$

(2) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+2x_2+3x_3=0 \right\}$

(3) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+4x_2-x_3=0, 2x_1+3x_2+x_3=0 \right\}$

(4) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+4x_2-x_3=0, 2x_1+8x_2-2x_3=0 \right\}$

(5) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+4x_2+x_3=0, 2x_1+3x_2+x_3=0, x_1-x_2+x_3=0 \right\}$

(6) $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1+4x_2+x_3=0, 2x_1+3x_2+2x_3=0, x_1-x_2+x_3=0 \right\}$

(3) のみ示す。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x}_1 \in W$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq W$ であるまた任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$ に対し $x_1+4x_2-x_3=0$, $2x_1+3x_2+x_3=0$ が成立しているので，$x_3=4x_2+x_1$ を 2 式に代入し，$3x_1+7x_2=0$ を得る。よって $x_2=-\dfrac{3}{7}x_1$ であり，$x_3=-4\dfrac{3}{7}x_1+x_1=\dfrac{-5}{7}x_1$ となる。よって

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{3}{7}x_1 \\ -\dfrac{5}{7}x_1 \end{pmatrix}=\frac{x_1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}=\frac{x_1}{7}\boldsymbol{x}_1$$

となり，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ より，$W \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ を得る。以上より $W=\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となり，$\boldsymbol{x}_1$ は W を生成する。