線形解析 I 問題解説 #5

河野

演習問題 1.13　2 次行列 A, B で $AB \neq BA$ となる行列を見つけよ。

講義でも説明したように適当に A, B を選んだとき，多くの場合 $AB \neq BA$ になります。各自適当に選んで計算して下さい。

演習問題 1.14　任意の 2 次行列 A と単位行列 E に対し $AE = EA = A$ が成立する事を示せ。

これも行列の積の定義が分かっていればできる問題です。一方だけやっておきましょう。A を任意の 2 次行列とし $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$$AE = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となり $AE = A$ が成立している。

演習問題 1.15　任意の行列 A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$ 及び $(A+B)C = AC+BC$(分配法則) が成立する事を示せ。

これも行列の積・和の定義を知っていればできるが，念のため一方を示しておこう。$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とする。$B + C = \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}$ なので，

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11}) + a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12}) + a_{12}(b_{22}+c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+c_{11}) + a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12}+c_{12}) + a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{pmatrix}$$

となる。

また

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ AC &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので $A(B+C) = AB + AC$ が成立している。

演習問題 1.16　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことを示せ。

行列式を用いてもできるが，ここでは定義に基づいて示す。背理法を用いる。もし A が逆行列 B を持つとする。$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立している。このとき $0 = 2a+4c = 2(a+2c) = 2\cdot 1 = 2$ が従うが，これは矛盾である。よって A は逆行列を持たない。

演習問題 1.17　$A = B(\theta)$ のとき $A^TA = E$ を示せ。

$A = B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とすると，$A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である。よって

$$\begin{aligned} A^TA &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。