線形解析 I 問題解説 #6

河野

演習問題 1.18　命題 1.26 を示せ。

ここでは n 次行列の場合もほぼ同様な形で通用する証明を与えておく。(5) 及び (6) を示す。

(5)　$A=(a_{ij})$ $E=(\delta_{ij})$ とする。$AE=\left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}\delta_{sj}\right)$ であるが，δ_{sj} は $s\neq j$ のとき 0 である事に注意すると

$$\sum_{s=1}^{3} a_{is}\delta_{sj}=\sum_{s\neq j} a_{is}\delta_{sj}+a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}1=a_{ij}$$

となるので $AE=A$ となる。また $EA=\left(\sum_{s=1}^{3}\delta_{is}a_{sj}\right)$ なので，

$$\sum_{s=1}^{3}\delta_{is}a_{sj}=\sum_{s\neq j}\delta_{is}a_{sj}+\delta_{ii}a_{ij}=a_{ij}$$

となり $EA=A$ が示される。

(6)　$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$,$C=(c_{ij})$ とおく。$AB=\left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}b_{sj}\right)$，$AC=\left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}c_{sj}\right)$ である。$B+C=(b_{ij}+c_{ij})$ なので

$$\begin{aligned}A(B+C) &= \left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}(b_{sj}+c_{sj})\right)=\left(\sum_{s=1}^{3}\{a_{is}b_{sj}+a_{is}c_{sj}\}\right)\\ &= \left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}b_{sj}\right)+\left(\sum_{s=1}^{3} a_{is}c_{sj}\right)=AB+AC\end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 1.19　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 ($AB=BA$) が成立しない事，2 つは零因子 ($A\neq O$,$B\neq O$ で $AB=O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。

交換法則が成立しない例は自分で考える事。零因子は次に例をあげるが，自分で考えつかなかった人は別の例を考えてみて下さい。行列の積が分かっていれば自分で考えつけるはずです。$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ とおくと，$A\neq O, B\neq O$ であるが，$AB=O$ である。

演習問題 1.20　次を計算せよ。ただし行列 A に対し $A^2=AA$, $A^n=A^{n-1}A$ と帰納的に定義し，A^2 を A の 2 乗，A^3 を A の 3 乗，A^n を A のべき乗 (n 乗) という。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a, b は自分の在籍番号の下 2 桁。

(2) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような行列 $A = (a_{ij})$ に対し A^3

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 2 乗と 3 乗

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

演習問題 $^{(*)}$**1.21**　上の事実 (任意の行列と可換な行列はスカラー行列である) を証明せよ ((∗) がついている問題は少し難しいかも)。

演習問題 1.22　上記の事を証明せよ。

演習問題 1.23　行列 A が $A^T = A$ を満たすとき，即ち $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，任意の i, j について $a_{ij} = a_{ji}$ が成立するとき，A を**対称行列** (*symmetric matrix*) という。また $A^T = -A$ が成立するとき，つまり任意の i, j について $a_{ij} = -a_{ji}$ が成立するとき**交代行列** (*alternating matirx*) という。このとき次を示せ。

(1) $A_s = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$, $A_a = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ とおくとき，A_s は対称行列，A_a は交代である。

(2) $A = B + C$ と表されて，B が対称，C が交代行列のとき，$B = A_s$, $C = A_a$ が成立する。

演習問題 1.24　対称行列 A, B に対し A と B が可換である事と AB が対称行列という事は同値である事を示せ。

また A, B が交代行列のときはどうなっているか調べよ。

A, B が対称行列のとき $A^T = A, B = B^T$ が成立している。よって $(AB)^T = B^T A^T = BA$ が成立している。AB が対称行列のとき $AB = (AB)^T = BA$ なので A, B は可換である。また A, B が可換のとき，$(AB)^T = BA = AB$ なので AB は対称行列である。

A, B が交代行列とき，$A^T = -A, B^T = -B$ なので $(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA$ が成立する。よって対称行列の場合と同様に AB が対称行列である事と A, B が可換な事は同値である。

演習問題 1.25　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

A が逆行列 B を持つとする。$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とする。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11}+bb_{21}+cb_{31} & ab_{12}+bb_{22}+cb_{32} & ab_{13}+bb_{23}+cb_{33} \\ db_{21}+eb_{31} & db_{22}+eb_{32} & db_{23}+eb_{33} \\ fb_{31} & fb_{32} & fb_{33} \end{pmatrix}$$

は単位行列であるから，$fb_{33} = 1$ が成立する。$f = 0$ のときは $0 = 1$ となり矛盾なので，$f \neq 0$ となる。よって

$$b_{33} = \frac{1}{f},\, b_{31} = 0,\, b_{32} = 0$$

が成立する。2 行目に着目すると，

$$db_{21} = 0,\, db_{22} = 1,\, db_{23} + e\frac{1}{f} = 0$$

となっている。$d = 0$ のときは前と同様に矛盾するので，$d \neq 0$ である。よって

$$b_{21} = 0,\, b_{22} = \frac{1}{d},\, b_{23} = -\frac{e}{df}$$

となる。1 行目は

$$ab_{11} = 1,\, ab_{12} + b\frac{1}{d} = 0,\, ab_{13} - b\frac{e}{df} + c\frac{1}{f} = 0$$

なので $a \neq 0$ が必要である。このとき

$$b_{11} = \frac{1}{a},\, b_{12} = -\frac{b}{ad},\, b_{13} = \frac{be-dc}{adf}$$

となる。よって A が逆行列をもてば $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ かつ $f \neq 0$ が成立する。

逆に a, d, f がすべて 0 のとき $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-dc}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$ とおくと，B は A の逆行列である。

演習問題 1.26　A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

B を A の逆行列とすると，$AB = BA = E$ が成立している。$E = E^T = (AB)^T = B^T A^T$ かつ $E = E^T = (BA)^T = A^T B^T$ なので B^T は A の逆行列になるので，A^T も正則であり，$(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ が成立している。

演習問題 1.27　命題 1.30 を証明せよ。

講義中も一部示したが，それとは異なる成分を計算しておこう。$\widetilde{A}A$ の 3 行目の成分が $\det(A)E$ の 3 行目が等しい事を示す。$\widetilde{A}A$ の $(3,1)$ 成分は $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)a_{11}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2)a_{21}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_3)a_{31}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{11}\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{21}\boldsymbol{e}_2)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{31}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+a_{31}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=0$ となり，$\det(A)E$ の $(3,1)$ 成分と一致する。$\widetilde{A}A$ の $(3,2)$ 成分は $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)a_{12}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2)a_{22}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_3)a_{32}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{12}\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{22}\boldsymbol{e}_2)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{32}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{32}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=0$ となり，$\det(A)E$ の $(3,3)$ 成分と一致する。$\widetilde{A}A$ の $(3,3)$ 成分は $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1)a_{13}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2)a_{23}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_3)a_{33}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{13}\boldsymbol{e}_1)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{23}\boldsymbol{e}_2)+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{33}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\det(A)$ となり，$\det(A)E$ の $(3,3)$ 成分と一致する。

演習問題 1.28　定理 1.32 を証明せよ。

(1)⇒(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2=|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2$ が成立する。ここで $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+|\boldsymbol{y}|^2$ と $|T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2=(T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))=(T_A(\boldsymbol{x})+T_A(\boldsymbol{y}),T_A(\boldsymbol{x})+T_A(\boldsymbol{y}))=(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{x}))+2(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{y}))+(T_A(\boldsymbol{y}),T_A(\boldsymbol{y}))=|T_A(\boldsymbol{x})|^2+2(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{y}))+|T_A(\boldsymbol{y})|^2$ が成立する。よって $|T_A(\boldsymbol{x})|^2+2(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{y}))+|T_A(\boldsymbol{y})|^2=|\boldsymbol{x}|^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+|\boldsymbol{y}|^2$ が成立するが，$|T_A(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{x}|,|T_A(\boldsymbol{y})|=|\boldsymbol{y}|$ に注意すれば $(T_A(\boldsymbol{x}),T_A(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が従う。
(2)⇒(3) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ を基本ベクトルとする。$\boldsymbol{a}_1=T_A(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{a}_2=T_A(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{a}_3=T_A(\boldsymbol{e}_3)$ が成立している。任意の i,j に対し $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=(T_A(\boldsymbol{e}_i),T_A(\boldsymbol{e}_j))=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$ となっている。
(3)⇒(5)

$$A^TA=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_3)\\(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

(5)⇒(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に対し $T_A(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$ なので，

$$\begin{aligned}
|T_A(\boldsymbol{x})|^2 &= (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2\\
&= a_{11}^2x_1^2+a_{12}^2x_2^2+a_{13}^2x_3^2+2a_{11}a_{12}x_1x_2+2a_{12}a_{13}x_2x_3+2a_{13}a_{11}x_3x_1\\
&\quad +a_{21}^2x_1^2+a_{22}^2x_2^2+a_{23}x_3^2+2a_{21}a_{22}x_1x_2+2a_{22}a_{23}x_2x_3+2a_{23}a_{21}x_3x_1\\
&\quad +a_{31}^2x_1^2+a_{32}^2x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{31}a_{32}x_1x_2+2a_{32}a_{33}x_2x_3+2a_{33}a_{31}x_3x_1\\
&= \left(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2\right)x_1^2+\left(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2\right)x_2^2+\left(a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2\right)x_3^2\\
&\quad +2\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}\right)x_1x_2+2\left(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}\right)x_2x_3\\
&\quad +2\left(a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}\right)x_3x_1\\
&= (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)x_1^2+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)x_2^2+(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3)x_3^2+2(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)x_1x_2+2(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)x_2x_3+2(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1)x_3x_1\\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2=|\boldsymbol{x}|^2
\end{aligned}$$