線形解析 I 問題解説 #7

河野

演習問題 1.29 次の行列で表現される線型写像 T_A に対し $\mathrm{Ker}(T_A)$ 及び $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

他も同様にできるので (2) のみ示しておく。

$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ であるが $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を成分で書き表すと,

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 3x + 2y + 8z &= 0 \\ 2x + y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

となる。この連立方程式は次の連立方程式

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

と同値である。この連立方程式は次の連立方程式

$$\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

と同値である。よって $\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x + 2z = 0, y + z = 0 \right\}$ となる。また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると $x + 2z = 0, y + z = 0$ を満たすので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので $\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と予想される。以下これを示す。$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しては $-2+2\cdot 1 =$

$0, -1+1=0$ なので $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ である。よって $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{Ker}(T_A)$ が成立する。

逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\mathrm{Ker}(T_A)$ の任意のベクトルとすると，$x+2z=0, y+z=0$ より

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので $\mathrm{Ker}(T_A) \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。以上により $\mathrm{Ker}(T_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。

演習問題 1.30　U, V, W を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。$T : U \longrightarrow V$, $S : V \longrightarrow W$ を線型写像とすると，合成写像 $S \circ T$ も線型写像であることを示せ。

$T : U \longrightarrow V$ が上への 1 対 1 写像であるとき，逆写像 T^{-1} も線型写像である事を示せ。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を U の任意のベクトルとすると $S \circ T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = S(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = S(T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})) = S(T(\boldsymbol{x}))+S(T(\boldsymbol{y})) = S \circ T(\boldsymbol{x}) + S \circ T(\boldsymbol{y})$ となる。U の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α に対し $S \circ T(\alpha \boldsymbol{x}) = S(T(\alpha \boldsymbol{x})) = S(\alpha T(\boldsymbol{x})) = \alpha S(T(\boldsymbol{x})) = \alpha(S \circ T(\boldsymbol{x}))$ となる。以上により $S \circ T$ は線型写像になる。

T が上への 1 対 1 写像であることから逆写像 T^{-1} が存在する。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を V の任意のベクトルとし，$\boldsymbol{X} = T^{-1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{Y} = T^{-1}(\boldsymbol{y})$ とする。このとき $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{Y})$ となる。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{X}) + T(\boldsymbol{Y}) = T(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$ となるので $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} = T^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ となる。よって $T^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} = T^{-1}(\boldsymbol{x}) + T^{-1}(\boldsymbol{y})$ となる。$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトル，α を $\boldsymbol{K}$ の任意の元とする。また $\boldsymbol{X} = T^{-1}(\boldsymbol{x})$ と置く。$T(\alpha \boldsymbol{X}) = \alpha T(\boldsymbol{X}) = \alpha \boldsymbol{x}$ となるので $\alpha \boldsymbol{X} = T^{-1}(\alpha \boldsymbol{x})$ となる。よって $T^{-1}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{X} = \alpha T^{-1}(\boldsymbol{x})$ となり T^{-1} は線型写像となる。

演習問題 *1.31　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転で与えられる写像を T とする。このとき T の表現行列を求めよ

z 軸を中心とする θ 回転 T_z は $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき $T_z(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される。z 軸を原点と $\boldsymbol{x}$(の終点) を通る直線に移す長さを変えない写像を S とすると $(S \circ T_z) \circ S^{-1}$ と置くとこれが $\boldsymbol{x}$ を軸にした θ 回転を与える事が分かる。S としては色々なものが存在するが，こ

こでは $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ と置き，$S(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$ とする。これは確かに長さを変えない変換で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写している。よって求める行列は

$$BAB^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

となる。