線形解析 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.1　命題 2.2 を証明せよ。

(1),(3) は講義で示しているので他を示す。$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (u_i), \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_i)$ 等の記号を採用する。

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_i) + (v_i) = (u_i + v_i) = (v_i + u_i) = (v_i) + (u_i) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
(4) $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対し $\boldsymbol{v}' = (-v_i)$ と置くと $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = (v_i) + (-v_i) = (v_i - v_i) = (0) = \mathbf{0}$ となる。
(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha((u_i)+(v_i)) = \alpha(u_i+v_i) = (\alpha(u_i+v_i)) = (\alpha u_i)+(\alpha v_i) = \alpha(u_i)+\alpha(v_i) = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$
(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = (\alpha+\beta)(v_i) = ((\alpha+\beta)v_i) = (\alpha v_i+\beta v_i) = (\alpha v_i)+(\beta v_i) = \alpha(v_i)+\beta(v_i) = \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$
(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = (\alpha\beta)(v_i) = (\alpha\beta v_i) = (\alpha(\beta v_i)) = \alpha(\beta v_i) = \alpha(\beta(v_i)) = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$
(8) $1\boldsymbol{v} = 1(v_i) = (1v_i) = (v_i) = \boldsymbol{v}$

演習問題 2.2　例 2.5 の例がベクトル空間になる事をチェックせよ。

和とスカラー倍が定義され定義 2.6 の 8 つの性質を満たす事を調べればよい。ここでは最後の (13) のみ示しておく。

関数 y_1, y_2 の和は $(y_1+y_2)(x) = y_1(x)+y_2(x)$ で定義されていた。$y_1, y_2 \in V$ に対し $y_1+y_2 \in V$ を示す。$y_1, y_2 \in V$ より $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$ 及び $y_2'' - y_2' - 2y_2 = 0$ が成立している。$(y_1 + y_2)'' - (y_1+y_2)' - 2(y_1+y_2) = y_1''+y_2''-y_1'-y_2'-2y_1-2y_2 = (y_1''-y_1'-2y_1)+(y_2''-y_2'-2y_2) = 0+0 = 0$ となるので $y_1 + y_2 \in V$ となる。

関数のスカラー倍は $(\alpha y)(x) = \alpha y(x)$ で定義されていた。$y \in V$ のとき $(\alpha y)'' - (\alpha y)' - 2(\alpha y) = \alpha y'' - \alpha y' - 2\alpha y = \alpha(y'' - y' - 2y) = \alpha 0 = 0$ となるので $\alpha y \in V$ となる。以上により V には和とスカラー倍が定義されている。以下 (1)–(8) の成立を示す。$y, y_1, y_2, y_3 \in V$，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ とする。
(1) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((y_1 + y_2) + y_3)(x) = (y_1 + y_2)(x) + y_3(x) = (y_1(x) + y_2(x)) + y_3(x) = y_1(x)+(y_2(x)+y_3(x)) = y_1(x)+(y_2+y_3)(x) = (y_1 + (y_2 + y_3))(x)$ となるので，$(y_1+y_2)+y_3 = y_1 + (y_2 + y_3)$ となる。
(2) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ について $(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x) = y_2(x) + y_1(x) = (y_2 + y_1)(x)$ となるので，$y_1 + y_2 = y_2 + y_1$ となる。
(3) 恒等的に零となる写像を z と書く。$z'' - z' - 2z = z(= 0)$ なので $z \in V$ となっている。$y \in V$ を V の任意の関数とする。任意の x に対し $(y + z)(x) = y(x) + z(x) = y(x) + 0 = y(x)$ なので $y + z = y$ となる。
(4) $y \in V$ に対し $\widetilde{y} = (-1)y$ と置くと $\widetilde{y} \in V$ となる。任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(y + \widetilde{y})(x) = y(x) + \widetilde{y}(x) = y(x) + (-1)y(x) = 0 = z(x)$ となるので $y + \widetilde{y} = z(= 0)$ となる。
(5) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\alpha(y_1 + y_2))(x) = \alpha((y_1 + y_2)(x)) = \alpha(y_1(x) + y_2(x)) = \alpha y_1(x) + \alpha y_2(x) = (\alpha y_1)(x) + (\alpha y_2)(x) = (\alpha y_1 + \alpha y_2)(x)$ となるので $\alpha(y_1 + y_2) = \alpha y_1 + \alpha y_2$ となる。
(6) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((\alpha + \beta)y)(x) = (\alpha+\beta)y(x) = \alpha y(x)+\beta y(x) = (\alpha y)(x)+(\beta y)(x)(\alpha y+\beta y)(x)$ となるので $(\alpha + \beta)y = \alpha y + \beta y$ となる。

(7) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $((\alpha\beta)y)(x) = (\alpha\beta)y(x) = \alpha(\beta y(x)) = \alpha(\beta y)(x) = (\alpha(\beta y))(x)$ となるので $(\alpha\beta)y = \alpha(\beta y)$ となる。
(8) 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対し $(1y)(x) = 1y(x) = y(x)$ となるので 1y=y となる。

演習問題 2.3　次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'(= -\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である。

(1) $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質をもつとき $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ が成立する。このとき $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_0$ となるので $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ が分かる。
(2) $\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{v}$ の逆元の性質を持てば，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ となっている両辺に $\boldsymbol{v}'$ を加えると $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}'$ となるが，$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_1$ となり $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'$ となる。
(3) 両辺に $\boldsymbol{v}$ の逆元 $\boldsymbol{v}'$ を加えると $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$ となる。一方 $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{w}$ となり $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となる。

演習問題 2.4　ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー α に対し次が成立する事を示せ。
(1) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$　　(2) $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
(3) $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

(1) $\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = (1-1)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$(ここで (2) を仮定した) となるので，演習問題 2.3(2) より $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ となる。
(2) $\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} = (1+0)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ となる。演習問題 2.3(3) より $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる。
(3) $\alpha\boldsymbol{0} = \alpha(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}) = \alpha\boldsymbol{0} + \alpha\boldsymbol{0}$ となる。演習問題 2.3(3) より $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となる。