線形解析 I 問題解説 #9

河野

演習問題 2.5　[行列の計算練習]　次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

これは説明の必要はないでしょう。行列の積の分からない人は，定義をよく読んで理解して下さい。

演習問題 2.6　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB = BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。4 次の行列についてそれぞれ例をあげよ。

これに関しても解答例はあげません。分からない人は 2 次行列でその様な例を考えて下さい。次に 3 次行列，最後に 4 次行列と次数を上げて行くと例が挙げられると思われます。

演習問題 2.7　**2 重添字に慣れるための問題**

(1) 命題 2.7 を示せ

(2) 行列の積に関し分配法則 $(A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC)$ と結合法則 $((AB)C = A(BC))$ が成立することを示せ。

(3) 行列 $A = (a_{ij})$ に対し $B = (b_{ij})$ を $b_{ij} = a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B = A^T$ と表す。この時 $(AB)^T = B^T A^T$ を示せ。

(4) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(5) n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n = 2, 3, 4$ 等で試算してみよ)。

(6) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $A^n = O$(零行列) が成立する事を示せ ($n = 3, 4$ 等で試算してみよ)。

一般の n 次行列になると，2 重添字を用いなくては計算できません。表題にもある様に 2 重添字に慣れるための問題ですから，これらの問題を解く事で 2 重添字を扱える様になって下さい。

(1) $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とする。$E_m = (\delta_{ij}), E_n = (\delta_{ij})$ (サイズは異なる) なので，$E_mA = (\delta_{ij})(a_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{m} \delta_{is}a_{sj}\right)$ となる。δ_{is} は $s = i$ のときのみ 1 であり他は 0 である。よって $\sum_{s=1}^{m} \delta_{is}a_{sj} = \delta_{ii}a_{ij} = a_[ij]$ となるので，$E_mA = (a_{ij}) = A$ となる。$AE_n = (a_{ij})(\delta_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\delta_{sj}\right)$ となる。δ_{sj} は $s = j$ のときのみ 1 であり他は 0 である。よって $\sum_{s=1}^{n} a_{is}\delta_{sj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}$ となるので，$AE_n = (a_{ij}) = A$ となる。

(2) $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列 $B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ を (n, p) 行列とする。$A(B+C) = (a_{ij})\{(b_{ij}) + (c_{ij})\} = (a_{ij})(b_{ij}+c_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\{b_{sj} + c_{sj}\}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) = AB+AC$ となる。次に A, B を (m, n) 行列，C を (n, p) 行列とする。$(A+B)C = \{(a_{ij}) + (b_{ij})\}(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})(c_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} \{a_{is} + b_{is}\} c_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}\right) + \left(\sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}\right) = AC+BC$ となる。A を (m, n) 行列，B を (n, p) 行列，C を (p, q) 行列とする。$(AB)C = \{(a_{ij})(b_{ij})\}(c_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right)(c_{ij}) = \left(\sum_{t=1}^{p}\left\{\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}\right\} c_{tj}\right) = \left(\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}c_{tj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}b_{st}c_{tj}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\left\{\sum_{t=1}^{p} b_{st}c_{tj}\right\}\right) = (a_{ij})\left(\sum_{t=1}^{p} b_{it}c_{tj}\right) = A(BC)$ となる。

(3) A の転置行列をここでは ${}^tA$ と書いているが，これからは A^T と書くことにする。$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を n 次行列とする。$AB = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right)$ であるから $(AB)^T = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si}\right)$ となる。また $A^T = (a_{ji}), B^T = (b_{ji})$ であるから，$B^TA^T = (b_{ji})(a_{ji}) = \left(\sum_{s=1} b_{si}a_{js}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si}\right) = (AB)^T$ となる。

(4) $A = (a_{ij})$ と置くと，$j \neq i+1$ のとき $a_{ij} = 0$ であり，$j = i+1$ のとき $a_{ij} = 1$ となっている。次の事実を m についての帰納法で示す。

「$A^m = (c_{ij}^{(m)})$ とおくとき $j \neq i+m$ のとき $c_{ij}^{(m)} = 0$ であり，$j = i+m$ のとき $c_{ij}^{(m)} = 1$ である。」

$m=1$ のときは成立している。$m=k$ のとき成立を仮定する。$c_{ij}^{(k+1)}=\sum_{s=1}^{n} c_{is}^{(k)}a_{sj}$ となる帰納法の仮定より $s\neq i+k$ のとき $c_{is}^{(k)}=0$ なので $c_{ij}^{(k+1)}=c_{i(i+k)}^{(k)}a_{(i+k)j}=a_{(i+k)j}$ となる。$a_{(i+k)j}$ は $j\neq(i+k)+1$ のとき 0 であり，$j=(i+k)+1$ のとき 1 なので $c_{ij}^{(k+1)}$ は表記の性質を持ち，$m=k+1$ でも命題は成立している。

$m=n$ のとき条件を満たす i,j は $1\leqq i,j\leqq n$ には存在しない。よって任意の i,j に対し $c_{ij}^{(n)}=0$ であり，$A^n=O$ となる。

(5) $A=(a_{ij})$ とおくと $i+j=n$ のとき $a_{ij}=1$ であり，それ以外は $a_{ij}=0$ である。$A^2=(c_{ij})$ と置くと，$c_{ij}=\sum_{s=1} a_{is}a_{sj}$ となる。$i+s=n$ 以外は $a_{is}=0$ なので $c_{ij}=a_{i(n-i)}a_{(n-i)j}=a_{(n-i)j}$ となる。c_{ij} は $(n-i)+j=n$ 即ち $i=j$ のときのみ 1 であり，$i\neq j$ のとき 0 となる。よって $c_{ij}=\delta_{ij}$ である。

以上により A^n は n が偶数のとき E となり，n が奇数のとき A となる。

(6)

一般の n で計算する前に $n=3$ で考える。条件より A は $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。$B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A=B+C$ なので $A^2=(B+C)^2=(B+C)(B+C)=B^2+CB+BC+C^2$ となる。ここで $BC=O, CB=O, C^2=O$ であり，$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となっている。$A^3=AB=O$ となる。一般の n で証明するため次を定義する。$A=(a_{ij})$ が $j<i+k$ のとき $a_{ij}=0$ になっているとき type k という。与えられた行列 A は type 1 である。次の事実を示す。

「type k の行列と type ℓ の行列の積は type $k+\ell$ である。」

$B=(b_ij)$ を type k，$C=(c_{ij})$ を type ℓ とする。即ち $j<i+k$ なら $b_{ij}=0$, $j<i+\ell$ なら $c_{ij}=0$ である。$BC=\left(\sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}\right)$ であるが，$s<i+k$ ならば $b_{is}=0$ なので $\sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}=\sum_{s=i+k}^{n} b_{is}c_{sj}$ となる。ここで $j<s+\ell$ なら $c_{sj}=0$ なので $j\leqq s+\ell$ となる項のみが 0 でないよって $\sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}=\sum_{s=i+k}^{n} b_{is}c_{sj}=\sum_{s=i+k}^{j-\ell} b_{is}c_{sj}$ ただし $i+k\leqq j-\ell$ でないときは 0 と考える。よって $i+k\leqq j-\ell$ でないとき，即ち $j<i+k+\ell$ のとき 0 となる。よって type $k+\ell$ である。

以上により A が type 1 のとき A^n は type n となる。n 次行列 A が type n のときは $A=O$ である。

演習問題 2.8　次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また正則のとき逆行列を求めよ。

$B = (b_{ij})$ とおき $AB = E$ から条件を出せばよい。結果のみ書いておく。
$abcd \neq 0$ のとき逆行列を持ち

$$A^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{ab} & \dfrac{1-xb}{abc} & \dfrac{zc+xb-ybc-1}{abcd} \\ 0 & \dfrac{1}{b} & -\dfrac{1}{bc} & \dfrac{1-zc}{bcd} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} & -\dfrac{1}{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{d} \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 2.9　A が正則のとき A^T も正則であり，$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ を示せ。

A が正則のとき $AB = BA = E$ となる行列 B が存在する。このとき $(AB)^T = B^T A^T, (BA)^T = A^T B^T, E^T = E$ となるので $A^T B^T = B^T A^T = E$ となる。よって A^T も正則行列であり，$\left(A^T\right)^{-1} = B^T$ となる。$B = A\ -1$ なので $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ となる。