線形解析 I 問題解説 #10

河野

演習問題 2.10　ベクトル空間 V と V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ について $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が V の部分空間になる事を示せ。

$w = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ と置く。$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_k \in W$ なので $W \neq \emptyset$ である。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を W の任意のベクトルとすると，あるスカラー $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ が存在して，$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots a_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{v}_k$ と書ける。このとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\boldsymbol{v}_k$ となるので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ である。W の任意の元 $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha a_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha a_k)\boldsymbol{v}_k$ となるので $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ となる。以上により W は部分空間である。

演習問題 2.11　(1) $\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ (2) $\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ (3) $W_3 = V$ をそれぞれ示せ。

(1) $\boldsymbol{v}_2 \in W_1$ と仮定する。$W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ なので $\boldsymbol{v}_2 = a\boldsymbol{v}_1$ となるスカラー a が存在する。このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ が成立しているので，$0 = 2a, 1 = a$ より $1 = 0$ となり矛盾，よって $\boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ となる。

(2) $\boldsymbol{v}_3 \in W_2$ と仮定する。$W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ なのでスカラー a, b が存在して $\boldsymbol{v}_3 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ となる。このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が成立している。$0 = 2a + 0$ より $a = 0$ となる。これを $-1 = 3a + 0b$ に代入して $-1 = 0$ が得られるので矛盾。よって $\boldsymbol{v}_3 \notin W_2$ である。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ なので $W_2 \subseteq V$ が成立している。$\boldsymbol{K}$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対し $x + y + z + w = 0$ が成立している。予備的計算として，$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ と表されていると仮定する。このとき $a_1 = \dfrac{y}{2}, a_2 = -3y - w, a_3 = \dfrac{3y}{2} - z$ となる。

$$\frac{y}{2}\boldsymbol{v}_1 + (-3y - w)\boldsymbol{v}_2 + (\frac{3y}{2} - z)\boldsymbol{v}_3 \quad = \quad \frac{y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + (-3y - w)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (\frac{3y}{2} - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{y}{2} - 3y - w + \frac{3y}{2} - z \\ y \\ \frac{3y}{2} - \frac{3y}{2} + z \\ -3y + 3y + w \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -y - z - w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}
$$

となるので $\boldsymbol{x} \in W_3$ となる。よって $V = W_3$ が成立する。

演習問題 2.12　次の各 V が $\boldsymbol{K}^n$ (n は問により変わる) の部分空間になる事を示せ。

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x - y + z - w = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x + y - z + w = 0, x - y + z - w = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^5 \;\middle|\; p + q + r + s + t = 0, p - q + r = 0 \right\}$

(1) のみ示す。

$0 - 0 + 0 - 0 = 0$ なので $\boldsymbol{0} \in V$ となる。よって $V \neq \emptyset$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in V$ とすると，$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$ であるが，$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = 0 + 0 = 0$ となるので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ となる。$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix}$ であるが，$\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4 = \alpha(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = \alpha 0 = 0$ となるので，$\alpha\boldsymbol{x} \in V$ となる。

演習問題 2.13　例 2.14 を証明せよ。

(1) 1 は定数であるが 0 次の多項式とみなせるので，$1 \in \boldsymbol{K}_n[x]$ となり，$\boldsymbol{K}_n[x] \neq \emptyset$ となる。$f(x), g(x) \in \boldsymbol{K}_n[x]$ とすると，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ と表す事ができる。$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ となるので，$f(x) + g(x) \in \boldsymbol{K}_n[x]$ が分かる。$\alpha f(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n$ となるので，$\alpha f(x) \in \boldsymbol{K}_n[x]$ が分かる。以上により $\boldsymbol{K}_n[x]$ は部分空間である。
(2) 微分可能な関数は連続であるから $D(I) \subseteq C(I)$ が成立している。1(恒等写像と見ている) $\in D(I)$ なので $D(I) \neq \emptyset$ である。$f, g \in D(I)$ とすると，$f + g$ も微分可能なので $f + g \in D(I)$ となる。$f \in D(I), \alpha \in \boldsymbol{R}$ とすると αf も微分可能なので $\alpha f \in D(I)$ となる。以上により $D(I)$ は部分空間である。
(3) $\mathbf{0}$ をすべての項が 0 である様な数列とすると，$0 + 0 = 0$ より $\mathbf{0}$ はフィボナッチ数列になる。即ち $\mathbf{0} \in \mathrm{Fib}$ である。よって $\mathrm{Fib} \neq \emptyset$ である。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\} \in \mathrm{Fib}$ とする。$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_i + b_i\}$ であるが，任意の自然数 i に対し $(a_i + b_i) + (a_{i+1} + b_{i+1}) = (a_i + a_{i+1}) + (b_i + b_{i+1}) = a_{i+2} + b_{i+2}$ となるので，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathrm{Fib}$ となる。$\alpha \boldsymbol{a} = \{\alpha a_i\}$ であるが，任意の自然数 i に対し $(\alpha a_i) + (\alpha a_{i+1}) = \alpha(a_i + a_{i+1}) = \alpha a_{i+2}$ となるので，$\alpha \boldsymbol{a} \in \mathrm{Fib}$ となる。以上により Fib は部分空間である。
(4) 恒等的に 0 である関数 0 は $\mathrm{De}(L)$ に属するので $\mathrm{De}(L) \neq \emptyset$ である。$y_1, y_2 \in \mathrm{De}(L)$ とすると，$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0, y_2'' - y_2' - 2y_2 = 0$ が成立している。$(y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2)' - 2(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' - y_1' - y_2' - 2y_1 - 2y_2 = (y_1'' - y_1' - 2y_1) + (y_2'' - y_2' - 2y_2) = 0 + 0 = 0$ となるので，$y_1 + y_2 \in \mathrm{De}(L)$ である。$y \in \mathrm{De}(L), \alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $(\alpha y)'' - (\alpha y)' - 2(\alpha y) = \alpha y'' - \alpha y' - \alpha 2y = \alpha(y'' - y' - 2y) = \alpha 0 = 0$ となるので，$\alpha y \in \mathrm{De}(L)$ である。以上により $\mathrm{De}(L)$ は部分空間である。

演習問題 2.14　定理 2.18 を証明せよ。

$\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成立している。また $\boldsymbol{K}^p$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ が成立している。このとき $\boldsymbol{K}^p$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = f(B\boldsymbol{x}) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ となるので，$f \circ g$ の表現行列が AB である事が分かる。

演習問題 2.15　f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(f) < U$, $\mathrm{Ker}(f) < V$ を示せ。問題が間違っています。$\mathrm{Ker}(f) < U, \mathrm{Im}(f) < V$ に変更してください。

$\mathbf{0} \in U$ に対し $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$(こっちは V のゼロベクトル) となるので，$\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(f), \mathbf{0} \in \mathrm{Im}(f)$ となる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると，$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$ となる。$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので，$\alpha \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。以上により $\mathrm{Ker}(f)$ は U の部分空間である。

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in U$ が存在して $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ となっている。$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')$ となるので，$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im}(f)$ となる。$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha \boldsymbol{y} = \alpha f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha \boldsymbol{x})$ となるので，$\alpha \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ となっている。以上により $\mathrm{Im}(f)$ は V の部分空間である事が分かる。

演習問題 2.16　次の行列 A に対し f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ と像 $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) と (6) が同じ行列ですね。(4) のみ示して置きましょう。

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3+x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので $x_3=0, x_4=0$ となる。逆に $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4$ に対し $x_3=0, x_4=0$ となっているとき $f_A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となる。よって

$$\mathrm{Ker}(f_A)=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_3=0, x_4=0 \right\}$$

である。

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f_A)$ とすると，あるベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4$ が存在して $\boldsymbol{y}=f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_3+x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている。よって $y_3=y_4=0$ となる。逆に $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ が $y_3=y_4=0$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1-y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と置くと，$f_A(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{y}$ となり，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f_A)$ が分か

る。よって

$$\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; y_3 = 0, y_4 = 0 \right\}$$

となる。

演習問題 2.17　上の事実を証明せよ。

(1) $a=0$ のときは $f(x)=ax$ なので任意の x に対し $f(x)=0$ である。よって $f(0)=f(1)$ かつ $1\neq 0$ となり，一対一でない。

$a\neq 0$ のとき $f(x)=f(x')$ より $ax=ax'$ となり両辺を a で割ることにより $x=x'$ となる。よって f は一対一写像である。任意の $y\in\boldsymbol{R}$ に対し $x=\dfrac{y}{a}$ と置くと $f(x)=ax=a\dfrac{y}{a}=y$ となり上への写像となる。以上により f は同型写像である。

(2) 実数の場合と同様に証明できるので省略。

(3) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を U の任意のベクトルとすると，$x+y+z=0, x'+y'+z'=0$ が成立している。$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')$ とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ より $x=x', y=y'$ となる。$z=-x-y=-x'-y'=z'$ となるので $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ となり一対一が示される。

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトルとする。$z=-x-y$ と置き，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置くと，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる。f は上への写像である事が分かり，以上により f は同型写像になる。

(4) $m\neq n$ のとき同型写像にならないという事実はこの段階では証明は難しい。ここでは，後で定義される次元を用いた証明を紹介しておく。次元を定義するためには定理 2.27 を必要とする事も注意しておく。$f_A:\boldsymbol{K}^n\longrightarrow\boldsymbol{K}^m$ を同型写像とする。$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ の基底とすると $f_A(\boldsymbol{v}_1),\ldots,f_A(\boldsymbol{v}_n)$ は $\boldsymbol{K}^m$ の基底となる。よって $\boldsymbol{K}^m$ の次元は n 次元となる。一方 $\boldsymbol{K}^m$ は m 次元なので $m=n$ となる。

A が正則行列ならば f_A は同型写像になる事の証明は難しくないが，A が正則でなければ f_A が同型写像でない事の証明は易しくない。これは後期に方程式論を学んだときに証明する。ここでは前者のみ示しておく。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^n$ に対し $f_A(\boldsymbol{x})=f_A(\boldsymbol{y})$ とする。$A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ の左から A^{-1} をかけると，$A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}A\boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ となり一対一が分かる。$\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$ と置くと，$f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=AA^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$ となり上への写像になる。よって f_A は同型写像である。

演習問題 2.18　例 2.23 を証明せよ。

(1) $X, X'\in U, \alpha\in\boldsymbol{K}$ とする。$T(X+X')=A(X+X')=AX+AX'=T(X)+T(X')$ 及び $T(\alpha X)=A(\alpha X)=\alpha(AX)=\alpha T(X)$ が成立するので線型写像になる。S も同様。

(2) 微分の線型性より従う。$f(x), g(x) \in \boldsymbol{R}[x], \alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x) = D(f(x))+D(g(x))$ 及び $D(\alpha f(x)) = \alpha f'(x) = \alpha D(f(x))$ が成立するので線型写像になる。

(3) 積分の線型性より従う。$f, g \in C(I), \alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $J(f+g) = \int_0^1 \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = J(f)+J(g)$ 及び $J(\alpha f) = \int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx = \alpha J(f)$ が成立するので線型写像になる。K も同様にできる。

(4) $\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\}$ に対し $\widetilde{\boldsymbol{a}} = S(\boldsymbol{a}), \widetilde{\boldsymbol{b}} = S(\boldsymbol{b})$ と置く。$\widetilde{\boldsymbol{a}} = \{\widetilde{a_i}\}, \widetilde{\boldsymbol{b}} = \{\widetilde{b_i}\}$ と置くと，$\widetilde{a_i} = a_{i+1}, \widetilde{b_i} = b_{i+1}$ となっている。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{a_i+b_i\}$ なので $S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \{c_i\}$ と置くと，$c_i = a_{i+1}+b_{i+1}$ となっている。$c_i = a_{i+1}+b_{i+1} = \widetilde{a_i}+\widetilde{b_i}$ となるので $S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a})+S(\boldsymbol{b})$ となる。定数倍に関しても同様にできる。

(5) 線型写像になることは微分の線型性より従うので省略。ここでは V への写像になる事を示す。$y \in U$ は $y''-y'-2y=0$ を満たしている。式の両辺を x で微分すると $y''-y''-2y'=0$ が得られるが，これは $D(y)''-D(y)'-2D(y)=0$ と見做せて，$D(y) \in V$ が分かる。

演習問題 2.19　T を線型空間 V から U への線型写像，S を U から W への線型写像とすると S と T の合成写像 ST は V から W への線型写像であることを示せ。また，T が同型写像の時逆写像 T^{-1} も線型写像であることを示せ。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $ST(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = S(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = S(T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})) = S(T(\boldsymbol{x}))+S(T(\boldsymbol{y})) = ST(\boldsymbol{x})+ST(\boldsymbol{y})$ 及び $ST(\alpha\boldsymbol{x}) = S(T(\alpha\boldsymbol{x})) = S(\alpha T(\boldsymbol{x})) = \alpha S(T(\boldsymbol{x})) = \alpha ST(\boldsymbol{x})$ となるので線型写像になる。T^{-1} も同様にできる。