線形解析 I 問題解説 #11

河野

演習問題 2.20　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ただし a, b は各自の出席番号の下 2 桁と 1 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

これはもう解説はいりませんね。分からない人は最初に 3 次元ベクトルの所の 1 次独立の説明を読んで下さい。(2) は p, q の値によって場合分けが必要になります。どのような場合に分けるかは 1 次独立の定義にしたがっていけば自然に分かるはずです。割算を実行する必要が出て来たとき，割る数がゼロがどうかの場合分けです。

演習問題 2.21　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立とする。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ に対し，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立かどうか調べよ。

また $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1$, に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

更に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$ に対し $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が 1 次独立かどうか調べよ。

$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + a_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = (a_1 + a_2 + a_3)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 + a_3)\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$ となるので，$a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_2 + a_3 = 0, a_3 = 0$ が成立する。これを解くと $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

次に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1$ の場合を考える。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = a_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + a_2(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) + a_3(\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_1) = (a_1 + a_3)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 + a_1)\boldsymbol{x}_2 + (a_3 + a_2)\boldsymbol{x}_3$ となるので，$a_1 + a_3 = 0, a_2 + a_1 = 0, a_3 + a_2 = 0$ が成立する。これを解くと $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。

最後に $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3$ の場合を考える。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = a_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + a_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + a_3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3) = (a_1 - a_2 + a_3)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 - a_1)\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3$ となるので，$a_1 - a_2 + a_3 = 0, a_2 - a_1 = 0, a_3 = 0$ が成立する。これを解くと $a_1 = a_2, a_3 = 0$ となるの。この解の中には $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 0$ の様に 0 以外の解が存在する。よって $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立ではない。

演習問題 2.22　次のベクトルの組がベクトル空間 V の基底である事を示せ。

(1) $V = \boldsymbol{K}^n$ で，ベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$

(2) $V = \boldsymbol{K}^3$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, x-y+z+w=0 \right\}$ でベクトルの組は $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) のみ示しておく。このタイプは確実にできるようになっておく事。

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ とおく。$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_1-a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $a_1 = a_2 = 0$ が従うので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ となるので，$W \subseteq V$ が成立する。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ が成立している。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{x}_1 + x_2\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

と表せるので，$\boldsymbol{x} \in W$ となり，$V \subseteq W$ が分かる。1 次独立性と $W = V$ から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が基底である事が分かる。

演習問題 2.23　ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事と次は必要十分である。「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} > \subsetneqq < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i >$ が成立する。ただし，$<> = \{\boldsymbol{0}\}$ とする。

「この事を証明せよ。」という文句が抜けていますが，まあわかりますね。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるとする。結論を否定して，ある i に対して $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ が成立しているとする。このとき $\boldsymbol{v}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle$ なので，スカラー $a_1, \ldots, a_{i-1}$ が存在して，$\boldsymbol{v}_i = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}$ となる。$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ と変形でき，$-1 \neq 0$ なので 1 次独立ではない。

任意の i に対し $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle \subsetneqq \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ が成立しているとする。$i = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ が 1 次独立である事を数学的帰納法で示す。

$i=1$ のときは $\langle\ \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ となるので，$\{\boldsymbol{0}\} \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ となる。よって $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ となるので，$\boldsymbol{v}_1$ は 1 次独立である。帰納法の仮定より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ が 1 次独立である仮定する。スカラー $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}$ が存在して，$a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_i\boldsymbol{v}_i + a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{0}$ となるとする。$a_{i+1} \neq 0$ のとき $\boldsymbol{v}_{i+1} = -\frac{a_1}{a_{i+1}}\boldsymbol{v}_1 - \cdot - \frac{a_i}{a_{i+1}}\boldsymbol{v}_i$ となるので，$\boldsymbol{v}_{i+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ となる。よって $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1} \rangle$ となり矛盾。よって $a_{i+1} = 0$ である。よって $a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ となるが，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ は 1 次独立なので，$a_1 = \cdots = a_i = 0$ となる。よって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1}$ は 1 次独立である。

演習問題 2.24　行列 A を演習問題 2.16 のものとする。行列 A に対し f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ 及び像 $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底を求めよ。

演習問題 2.16 で生成系を求めている人はその 1 次独立性をチェックすればよいだけです。そうでない人は 1 次独立な生成系を見つけて，それが 1 次独立である事をチェックしてください。ここでは (1) のみ示しておく。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるが，演習問題 2.16(1) はすでに解かれていて，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f_A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x_2 = x_3 = x_4 = 0 \right\}, \\ \mathrm{Im}(f_A) &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; y_4 = 0 \right\} \end{aligned}$$

が分かっているものとする。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1$ が $\mathrm{Ker}(f_A)$ の基底である事を示す。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。また $\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ker}(f_A)$ より $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq \mathrm{Ker}(f_A)$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を $\ker(f_A)$ の任意のベクトルとすると $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ なので $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{x}_1$ となり，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ が分かる。よって $\mathrm{Ker}(f_A) = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となり，$\boldsymbol{x}_1$ が基底である事が分かる。

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ とおく。$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底である事を示す。

$a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると，$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ は 1 次独立である。$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \in \mathrm{Im}(f_A)$ なので，$\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle \subseteq \mathrm{Im}(f_A)$ となる。逆に $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ を $\mathrm{Im}(f_A)$ の任意のベクトルとすると，$y_4 = 0$ である。よって $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1\boldsymbol{y}_1 + y_2\boldsymbol{y}_2 + y_3\boldsymbol{y}_3$ となり，$\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle$ が分かる。よって $\mathrm{Im}(f_A) = \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle$ となり，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ が $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底である事が分かる。

演習問題 2.25　次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

(5) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, x + 4y - z + w = 0 \right\}$

(6) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(7) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(8) $V=\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} \right\rangle$

(9) $V=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

V の基底を求める事ができれば，その個数が次元になる。よって V の基底を見つければよい。(1)–(5) の様なタイプはすでに何回かやっているので，ここでは (8) を考える。$V=\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} \right\rangle$ という形をしているので，この 3 つのベクトルの組が 1 次独立なら，これが基底になるが，そうではない。

$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ とおくとき，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ が V の基底である事を示す。$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ が成立しているとすると，$a_1+3a_2=0, 2a_1+2a_2=0, 3a_1+a_2=0$ が成立している。代入して計算すると，(ここでは計算過程を省略しているが，計算過程を省略しない方が，間違った場合部分点が与えられる可能性が多い。) $a_1=a_2=0$ を得るので，1 次独立である。

$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ となるので $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ である。$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}=\frac{5}{4}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}=\frac{5}{4}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ となるので，$\boldsymbol{x}_3\in\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle$ である。よって $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle$ が成立している。よって $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle=\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle$ となり，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ が V の基底である事が分かる。

以上により V は 2 次元である。