線型解析 II 要綱 #1 2004–10–5 河野

今回の講義から線形解析 II に入る。要綱の number 及びページ数は 1 から始めるが，章の数は前期からの継続とする。

3 連立 1 次方程式と階数

「連立 1 次方程式を解く」事に関しては前期でも式変形の途中で何度か出て来た。ここでは連立 1 次方程式の一般理論を行列の基本変形と階数と関係させて扱う。この章の keyword は 3 つ，**連立１次方程式，基本変形，階数**である。階数は定義が 4 種類あり，1 つを定義に採用すれば残り 3 つは性質になる。階数が 4 つの側面を持っていることをしっかり押さえることが重要である。

3.1 連立 1 次方程式

前期に取り上げた線型写像の像と核を例にとろう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とし，線型写像 $T : \boldsymbol{K}^4 \longrightarrow \boldsymbol{K}^4$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。線型写像 T の核及び像は

$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}, \mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, \text{あるベクトル}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4\text{が存在して}\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x}\text{となる} \right\}$

で定義されていた。$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と置くとき，$\boldsymbol{X} \in \mathrm{Im}(T)$ となる必要十分条件は連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= X \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= Y \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= Z \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= W \end{aligned}$$

が解を持つ事となる。また $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ となる必要十分条件は x, y, z, w が連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w &= 0 \\ 9x + 10y + 11z + 12w &= 0 \\ 13x + 14y + 15z + 16w &= 0 \end{aligned}$$

の解になる事であり，この様な解がどれぐらい存在するかという事も問題であった。この様に線型代数での議論には色々な所で連立 1 次方程式が顔を出す。この章では連立 1 次方程式の一般論について考察しよう

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

演習問題 3.1　上の例の $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ をもっと見やすい形で表せ。また生成系を用いて表せ。

最初に問題を定式化しよう。連立 1 次方程式を表現する形は色々ある。

$$(E)\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})\in\boldsymbol{K}^m$, $\boldsymbol{b}=(b_i)\in\boldsymbol{K}^m$ とおくと

(E_V)　$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$

$A=(a_{ij})\in M(m,n;\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{x}=(x_j)\in\boldsymbol{K}^n$ とおくと

(E_M)　$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

この 3 つは同じ内容を表している。(E) は通常の表記，(E_V) はベクトル方程式として表記したもの，(E_M) は行列表示である。この時問題は以下の様に定式化される。

(1) $(E),(E_V),(E_M)$ はどの様な場合に解を持つのか。

(2) 解が存在するとき，解はどれくらい有るのか。

(3) その時すべての解をパラメーター等を用いて表せ。

一般に議論する前に具体例を見よう。

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0y+2z+0w=1 \\ 1x+0y+3z+1w=1 \\ 2x+0y+5z+1w=b+2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 10201 \\ 10311 \\ 2051b+2 \end{pmatrix}$$

左が連立 1 次方程式，右がその係数を書き並べた行列 (係数拡大行列と呼ばれる) である。ここで b は与えられた定数とする。この方程式が解を持つか，また持つときその解をどの様に書き表すか，という問題を考える。与えられた連立方程式では解の存在等に関して分かりにくいので加減法を用いて変形して行く。

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0y+2z+0w=1 \\ 1x+0y+3z+1w=1 \\ 2x+0y+5z+1w=b+2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 10201 \\ 10311 \\ 2051b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 2x+1w+5z+0y=b+2 \end{array}\right. \quad (y \text{ と } w \text{ の位置の入れ換え}) \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 2150b+2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 列} \leftrightarrow 4 \text{ 列})$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 1x+0w+2z+0y=b+1 \end{array}\right. \quad (3 \text{ 式} \to 3 \text{ 式ー } 2 \text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 1020b+1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 行} \to 3 \text{ 行ー } 2 \text{ 行})$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 0x+0w+0z+0y=b \end{array}\right. \quad (3 \text{ 式} \to 3 \text{ 式ー } 1 \text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 0000b \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 行} \to 3 \text{ 行ー } 1 \text{ 行})$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 0x+1w+1z+0y=0 \\ 0x+0w+0z+0y=b \end{array}\right. \quad (2 \text{ 式} \to 2 \text{ 式ー } 1 \text{ 式}) \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 01100 \\ 0000b \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 行} \to 2 \text{ 行ー } 1 \text{ 行})$$

この変形で行っているのは，変数の場所の入れ換え (行列では列の入れ換え) と式の加減 (行列では，ある行の何倍かを別の行に加える操作) の 2 つの操作である。この変形は逆変形もできるので，与えられた連立 1 次方程式と最後の連立 1 次方程式は同値である事が分かる。よって最後の連立 1 次方程式を考える。

解の存在に関しては，$b \neq 0$ のとき解は存在しない。$b = 0$ の時解が存在する事が分るので以下 $b = 0$ とする。y は式の値に影響を与えないので自由に決定できる。それ以外の x, z, w は 1 つを決めると他はそれに従って決まる。今 z を選び，これを自分が自由に決定できるとしよう。このことを書き方の上でも明確にするため $s = z, y = t$ とおく[(1)]。連立 1 次方程式の解 x, y, z, w はパラメータ s, t を用いて

$$x = -1 - 2s,\ y = t,\ z = s,\ w = -s$$

と表す事ができる[(2)]。s, t を任意に与えると，x, y, z, w は連立 1 次方程式の解になっているし，逆に連立 1 次方程式の任意の解はある s, t を用いて上のように書ける。

この事をベクトルを用いて書き直してみよう。行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$ とおく。連立 1 次方程式の解ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ 全体の集合を $W(A, \boldsymbol{b})$ と

[(1)] z, y を選んだのは係数を整数にするためであり，例えば，x, y を選んでもよい。ただし，今の場合 y は選択しておく必要がある。

[(2)] t, s に置き換える必要は特にないのだが，表示を明確にするためここでは置き換えた。勿論，y, z を用いて表してもよい。

すると，$W(A,\boldsymbol{b}) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \right\}$ である。上の議論により $b \neq 0$ のとき $W(A,\boldsymbol{b}) = \emptyset$ であり，$b = 0$ のとき $W(A,\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ となる。$b = 0$ のとき解ベクトル $\boldsymbol{x}$ はパラメータ s, t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2s \\ t \\ s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表す事ができる。即ち

$$W(A,\boldsymbol{b}) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$$

となる。

$W(A,\boldsymbol{0}) = W(A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ とおくと，$W(A)$ はベクトル空間で，$W(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ となっている。$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $W(A)$ の基底である。

今までの議論をふり返ってみよう。連立 1 次方程式の任意の解ベクトル $\boldsymbol{x}$ は 1 つの解ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $W(A)$ のベクトルの和になっている。解をパラメータ表示するためには $W(A,\boldsymbol{b})$ に属するベクトル 1 つ (例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) と $W(A)$ の基底 (例えば $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) が分かればよい。逆に $W(A,\boldsymbol{b})$ の解の「**無駄のない**」パラメータ表示が得られたとき，そのパラメータ表示から，連立 1 次方程式の 1 つの解と $W(A)$ の 1 組の基底を求める事ができる。

解が存在する場合，解がどれぐらいあるかという問題は $W(A)$ の次元がどれぐらいかという問題に置き換える事ができる。

連立 1 次方程式で，特に $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合を考える。

$$(H)\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})$ とおくと

$(H_V)\quad \boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{0}$

$A=(a_{ij}),\ \boldsymbol{x}=(x_j)$ とおくと

$(H_M)\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

命題 3.1 (E) に解が存在する時，(E) の解と (H) の解の間にはは 1 対 1 対応がある。

集合の言葉で言えば，$W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ のとき $W(A,\boldsymbol{b})$ から $W(A)$ への上への 1 対 1 写像が存在する。

証明 $W(A,\boldsymbol{b})\neq\emptyset$ であるから $W(A,\boldsymbol{b})$ の 1 つのベクトルを $\boldsymbol{x}_0$ とする。$W(A,\boldsymbol{b})$ から $W(A)$ への写像 f を $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ とする。$A(f(\boldsymbol{x}))=A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ なので実際 $f(\boldsymbol{x})\in W(A)$ となっている。

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in W(A,\boldsymbol{b})$ に対し $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')$ とすると，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_0$ より，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ となる。よって f は 1 対 1 写像である。$W(A)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0$ とおくと $A(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{y}+A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ となるので，$\boldsymbol{x}\in W(A,\boldsymbol{b})$ である。また $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}$ となるので f は上への写像である。 ▮

命題 3.1 により (E) に解が存在する場合，その解と (H) の解は 1 対 1 対応する。問題 (2) の『どれぐらい』というときのはかる基準として $W(A)=\{\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n\mid\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$ の次元 $\dim W(A)$ をとる事にする。この数はパラメータ表示に関していうと，パラメータの個数に対応する。

演習問題 3.2 次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。またこの問題での $W(A)$ の基底を求めよ。

$$(1)\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z+w & = & 1 \\ x+y+z+w & = & a \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z+u+v & = & 1 \\ x+2y+3z+4v & = & 0 \\ 2x+3y+4z+5v & = & a \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1x & + & 0y & + & 0z & + & 2v & + & 0w & = & 1 \\ 0x & + & 1y & + & 0z & + & 0v & + & 3w & = & 1 \\ 1x & + & 0y & + & 0z & + & 3v & + & 1w & = & 2 \\ 1x & + & 1y & + & 0z & + & 3v & + & 4w & = & a+3 \\ 1x & + & 2y & + & 0z & + & 7v & + & 0w & = & b+4 \end{array}\right.$$

演習問題 3.3 $(m.n)$ 行列 A に対し $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 T を $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定義する。次の A に対しそれぞれ $\mathrm{Ker}(T)$ 及び $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$