線型解析 II 要綱 #2

2004–10–7 　河野

3.2 基本変形

この節では行列に対し「基本変形」と呼ばれる変形を考える。

(1) 行列のある行に他の行のスカラー倍を加える操作，(2) ある行をスカラー倍する操作 (ただしスカラーは 0 ではないとする)，(3) ある行と別の行を交換する操作をまとめて**行基本変形**と言う。列に対しても同じ様な変形が考えられる。(1) 行列のある列に他の列のスカラー倍を加える操作，(2) ある列をスカラー倍する操作 (ただしスカラーは 0 ではないとする)，(3) ある列と別の列を交換する操作をまとめて**列基本変形**と言う。両方合わせて**基本変形**と呼ぶ。

定義 3.2 次の様な n 次行列 $P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda), R_n(k,\ell;\alpha)$ を基本行列と呼ぶ。ただし，$P_n(k,\ell) = (p_{ij})$,$Q_n(k;\lambda) = (q_{ij})$,$R_n(k,\ell;\alpha) = (r_{ij})$ と置いた時 $p_{k\ell} = p_{\ell k} = 1$, $p_{ii} = 1(i \neq k,\ell)$, $p_{ij} = 0$(その他の場合)，$\lambda \neq 0$, $q_{kk} = \lambda$, $q_{ii} = 1(i \neq k)$,$q_{ij} = 0$(その他の場合)，$r_{k\ell} = \alpha$,$r_{ii} = 1$,$r_{ij} = 0$(その他の場合) とする。つまり

$$P_n(k,\ell) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& \\ &&& 0 & 1 & & 0 & 0 &&& \\ &&& \vdots & & \ddots & & \vdots &&& \\ &&& 0 & & & 1 & 0 &&& \\ &&& 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_n(k;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

$$
R_n(k,\ell;\alpha)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & & 0 & & & \\
 & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

次の 2 つの命題は明らかであろう。

命題 3.3 基本行列 $P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda), R_n(k,\ell;\alpha)$ は正則行列 (逆行列が存在する行列) で，その逆行列，転置行列も基本行列である。逆行列，転置行列は次の様に与えられる。

$P_n(k,\ell)^{-1}=P_n(k,\ell), Q_n(k\,;\,\lambda)^{-1}=Q_n\left(k\,;\,\dfrac{1}{\lambda}\right), R_n(k,\ell\,;\,\alpha)^{-1}=R_n(k,\ell\,;\,-\alpha),$

$P_n(k,\ell)^T=P_n(k,\ell), Q_n(k\,;\,\lambda)^T=Q_n(k\,;\,\lambda), R_n(k,\ell\,;\,\alpha)^T=R_n(\ell,k\,;\,\alpha).$

命題 3.4 基本変形とは基本行列をかける事を意味する。具体的には次の関係がある。

(1) A の k 行と ℓ 行を入替える $\Leftrightarrow A\to P_n(k,\ell)A$
　A の k 列と ℓ 列を入替える $\Leftrightarrow A\to AP_m(k,\ell)$

(2) A の k 行に 0 でないスカラー λ をかける $\Leftrightarrow A\to Q_n(k\,;\,\lambda)A$
　A の k 列に 0 でないスカラー λ をかける $\Leftrightarrow A\to AQ_m(k\,;\,\lambda)$

(3) A の k 行に ℓ 行のスカラー α 倍を加える $\Leftrightarrow A\to R_n(k,\ell\,;\,\alpha)A$
　A の ℓ 列に k 列のスカラー α 倍を加える $\Leftrightarrow A\to AR_m(k,\ell\,;\,\alpha)$

基本変形では次の命題が基本的である。

命題 3.5 任意の行列 A に対し適当な基本変形を繰返すと，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形 (**標準形**ともいう) にできる (O の部分がない場合もある)。
同じ事を基本行列の言葉でいえば，基本行列 $P_1,\ldots,P_t,Q_1,\ldots,Q_s$ が存在して

$$
Q_s\cdots Q_1AP_1\cdots P_t=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}
$$

と書ける。

行列が $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できれば $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できる。$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形まで十分の場合もある。この形をここでは**準標準形**と呼んでおこう[(1)]。

略証　すべての成分が 0 という列があれば列基本変形で最後の列に移動する。以下その様な列があればこの操作を行う。すべての成分が 0 なら $r=0$ で証明は終る。0 でない成分をもつ列が存在したとする。行基本変形で $(1,1)$ 成分に移動できる。定数倍をかけて $(1,1)$ 成分を 1 に変える。更に行基本変形で $(i,1)$ 成分 $(i \neq 1)$ を，列基本変形で $(1,j)$ 成分 $(j \neq 1)$ を，0 に変える。

これが終ったら同様の操作を $(2,2)$ 成分を中心として行う。以下同様。 ∎

命題 3.5 の証明を見ると与えられた行列を基本変形により準標準形に変形する方法が得られる。

step 1

(1.1) 1 列目に着目，この列がゼロベクトルなら，基本変形でこの列を一番最後の列へ移動する。

(1.2) 1 列目にはゼロでない成分があるのでそれを 1 行目へ移動する。その成分で 1 行目を割って $(1,1)$–成分を 1 にする。

(1.3) $(i,1)$–成分 $(i>1)$ a_{i1} が 0 でなければ，1 行目の a_{i1} 倍を i 行目から引く。a_{i1} が 0 なら何もしない。

step 2

(2.1) 2 列目に着目，この列の 2 行目以降の成分が 0 なら，基本変形でこの列を一番最後の列へ移動する。

(2.2) 2 列目 2 行目以降にはゼロでない成分があるのでそれを 2 行目へ移動する。その成分で 2 行目を割って $(2,2)$–成分を 1 にする。

(2.3) $(i,2)$–成分 $(i>2)$ a_{i2} が 0 でなければ，2 行目の a_{i2} 倍を i 行目から引く。a_{i2} が 0 なら何もしない。

step k

$(k.1)$ k 列目に着目，この列の k 行目以降の成分が 0 なら，基本変形でこの列を一番最後の列へ移動する。

$(k.2)$ k 列目 k 行目以降にはゼロでない成分があるのでそれを k 行目へ移動する。その成分で k 行目を割って (k,k)–成分を 1 にする。

$(k.3)$ (i,k)–成分 $(i>k)$ a_{ik} が 0 でなければ，k 行目の a_{ik} 倍を i 行目から引く。a_{ik} が 0 なら何もしない。

この変形はアルゴリズムであり，これに従えばどんな行列でも標準形に変形できる。しかし，この方法が一番効率がよいかという問題は別である。慣れてくれば自然と効率の悪い変形をさける様になると思われる。

演習問題 3.4　次の行列に基本変形を行なって標準形または準標準形にせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

[(1)]一般的な用語ではない。

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$　ただし，a, b, c, d は自分の学生番号の下 4 桁。

ここで連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とその係数拡大行列 $(A\,\boldsymbol{b})$ の基本変形の関係を見ておこう。簡単のため $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ としよう。$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$ だが，これに対応する連立 1 次方程式は

$$ax + by = p, \qquad cx + dy = q$$

である。係数拡大行列に行基本変形の 1 番目を行う。例えば，2 行目の 2 倍を 1 行目に加える変形を行うと，得られる行列は $\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d & p+2q \\ c & d & q \end{pmatrix}$ であるが，これに対応する連立 1 次方程式は

$$(a+2c)x + (b+2d)y = p + 2q, \qquad cx + dy = q$$

となる。この変形は連立 1 次方程式では，2 式の 2 倍を 1 式に加えたものを 1 式と置き換える，「加減法」を行っている事になる。

同様に 2 番目の行基本変形は式の両辺を何倍かする事に対応し，3 番目の変形は 1 番目の式と 2 番目の式の位置を入れ換える事に対応している。

次に列基本変形を考える。ただし，方程式と対応させるためには**最後の列を変形してはいけないし，最後の列を他の列に加える**変形を行ってもいけない。

2 列の 2 倍を 1 列に加える変形を考える。$\widetilde{A}'' = \begin{pmatrix} a+2b & b & q \\ c+2d & d & q \end{pmatrix}$ に対応する方程式は

$$(a+2b)x + by = p, \qquad (c+2d)x + dy = q$$

となるが，この式系を

$$ax + b(y+2x) = p, \qquad cx + d(y+2x) = q$$

と変形すれば，元の連立方程式で変数を $x \to x, y \to y+2x$ と変形したものになっている。1 列を 2 倍する変形を行うと，$\widetilde{A}''' = \begin{pmatrix} 2a & b & p \\ 2c & d & q \end{pmatrix}$ となり，これに対応する方程式は

$$2ax + by = p, \qquad 2cx + dy = q$$

となるが，これは元の連立方程式で $x \to 2x, y \to y$ としたものになっている。1 列と 2 列を入れ換えると，$\widetilde{A}'''' = \begin{pmatrix} b & a & p \\ d & c & q \end{pmatrix}$ となるが，これに対応する連立方程式はもとの式で $x \to y, y \to x$ としたものになっている(2)。

---

(2)列基本変形は変数の変換に対応しているので，変換を追うのが易しくない。基本変形で連立方程式を解く場合，変形を行基本変形に限った方がまぎれが少ないと思われる。