線型解析 II 要綱 #5

2004–11–2　河野

4 行列式

高校で学んだように 2 次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ という量は逆行列の存在を判定できる等，重要な量であった。また前期に 1.6 節で 3 次行列に関して行列式を定義した。これを一般の n 次行列に対しても定義し，その性質を調べるのがこの章の目的である。

4.1 2 次, 3 次行列の行列式

2 次の行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対しては，その行列式 $\det(A)$ を $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ で定義する。高校では「行列式」という言葉は出て来ていないが，実際には，行列式は次の性質を持つ事を (少なくとも数学 C を選択した学生は) 学んでいる ; 行列式 $\det(A)$ は『A が逆行列を持つ $\Longleftrightarrow \det(A)\neq 0$』という性質を持つ。また 1.6 節では 3 次行列に対し行列式を定義し，同様の性質を持つ事を示した。

この様な性質を持つものを n 次の行列に対しても定義したい。そのために 2 次の場合行列式とはどの様なものかを見直してみる。幾何的ベクトルも考えるので，この節ではしばらく行列の成分は実数としておく。

2 次の場合も 3 次の場合も行列式は「幾何的」側面と「代数的」側面を持つ。n 次行列に対する行列式の定義には「代数的」側面が用いられる。最初に幾何的側面を見ておこう。

2 次行列の場合行列式は幾何的には「有向面積」と考えられる。$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおく。$\det(A)=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，即ち 2 つの 2 次元ベクトルの組に対し実数が対応していると考える。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の面積と考えられる。「有向」の意味は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負を意味した。

次に 3 次行列に対する行列式を考えよう。3 次行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，これを 3 次元ベクトル 3 個の組と考える。

即ち $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と見る。このとき $\det(A)=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ と定義した。このとき $\det(A)$ は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が張る平行 6 面体の「有向」体積であった。「有向」の意味は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負を意味した。

次に代数的性質を見よう。2 次行列の行列式は代数的には次の性質を持つ実数への写像と考えられる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) [**多重線型性**] $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\det(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}')=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{b})=\alpha\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(2) [**交代性**] $\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) [**基本ベクトルに対する値**] $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると $\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=1$

逆にこの 3 つの性質は行列式を特徴づける。実際 2 次元ベクトル 2 個の組に対し実数を対応させる写像 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である。

演習問題 4.1 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が (1), (2) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ である事を示せ。この事から (1), (2), (3) を満たせば，$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が分かる。

次に 3 次行列に対する行列式の代数的性質を考えよう。3 次行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ に対し，$\det(A)=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ と定義したが，これを 3 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に対し実数を対応させる写像と見て $\det(A)=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ と書くと次の性質を持つ事が分かる。

命題 4.1

(1) [**多重線型性**] $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_2',\boldsymbol{a}_3)=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2',\boldsymbol{a}_3)$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1,\alpha\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$

1") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_3')=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3')$

2") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\alpha\boldsymbol{a}_3)=\alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$

(2) [**交代性**] $\det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)=-\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)=-\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$

(3) [**基本ベクトルに対する値**] $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$$

証明 $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)=-\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 以外はそれ程難しくないので演習問題にまわす。$D=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3),\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ を考える。$\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$ は $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ と直交するので $D=0$ となる。また多重線型性は証明されているとして，それを用いると $D=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3)$ となる。$i=2,3$ に対し $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_i$ は直交するので，$\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i)=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i)=0$ となる。以上から $0=D=\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)+\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)$ となり，命題が示される。 ∎

演習問題 4.2 命題 4.1 を証明せよ。

命題 4.2 ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が上の (1), (2) を満たすとき

$$D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\}$$

となる。とくに行列式に対し

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

が成立する。

略証 $i = 1, 2, 3$ に対し $\boldsymbol{a}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + a_{3i}\boldsymbol{e}_3$ と書けるので，これを用いて $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を変形していけば得られる。 ■

次節で一般の n に対しては拡張を行うが，代数的な立場から，即ち命題 4.1 が成立する様に拡張を行う。

4.2 行列式の定義と性質

n 次行列に対してその行列式を定義しよう。本質的には 3 次の場合と同様であるが次数が高い分見かけは複雑になる。

定義 4.3 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \in M(n\,; \boldsymbol{K})$ に対し A の行列式 $\det(A) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ をベクトルの n 個の組からスカラーへの写像で次の性質を満たすものとして定義する[(1)]。

(1) **多重線型性** 各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し

1) $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

2) $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

(2) **交代性** $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

(3) **単位の値** $\det(E) = 1$ 但し，E は単位行列。また，同じことだが，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ とすると，$\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$。

演習問題 4.3 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i < j)$ のとき $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ を示せ。

$\det(A)$ のことを $|A|$ とも書く。$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し

[(1)] 厳密に言うとこの様な性質を持つものが存在する事を示す必要がある。それについてはこの節の最後で簡単にふれる

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|$$ と表すべきかもしれないが普通

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と書く。一般の n について前節と同じ様に計算をして書き下す事もできないわけではないが余り実際的ではない[(2)]。

定義に基づいて計算していくよりもいくつかの性質を証明しそれを用いて計算を実行した方が効率的である。そのためにいくつかの命題を必要とする。

命題 4.4

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \alpha \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \alpha \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \end{aligned}$$

命題 4.5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

命題 4.4 の証明：　表現のため 2 つ書いただけで本質的には同じもの。

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \alpha \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \blacksquare \end{aligned}$$

命題 4.5 を証明するため次の補題を証明する。

補題 4.6 $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ をベクトルの組からスカラーへの写像で定義 4.3 の (1) 多重線型性 (2) 交代性を満足するものとする。この時 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を基本ベクトルとすると

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

が成立する。

略証　$C = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とおくと $F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = C \det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ が成立する。F,det の交代性より $F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = C \det(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ 等が成立する。一般的に書くと $a(1), \ldots, a(n)$ を 1 から n までの自然数を適当に入れ替えたものとすると

$$F(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)}) = C \det(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})。$$

[(2)]実際実行してみると 4 次行列の行列式の場合項が 24 個，5 次行列の行列式の場合項が 120 個，n 次行列の行列式の場合 $n!$ 個でてくる。

$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n$ とおき多重線型性を使うと $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ は $F(\boldsymbol{e}_{a(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a(n)})$ の和で表す事ができる。よって O.K.。 ∎

演習問題 4.4　補題 4.6 の証明を完全なものにせよ。

命題 4.5 の証明：　$\boldsymbol{a}'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n-11} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}'_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$ とおき

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とすると F は $n-1$ 次での多重線型性と交代性を持つ事が分る。定数 $C = F(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1})$ とおくと補題 4.6 より $F(\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{n-1})$ は $n-1$ 次の行列式の C 倍になる。よって $C = a_{nn}$ である事を示せば証明が終わる。命題 4.4 より，j 列の $-a_{jn}$ 倍を n 列に加えても行列式の値は変らないので

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}|E_n| = a_{nn} \ ∎$$

命題 4.4 は列基本変形の 3 番目の変形 (ある列の何倍かを別の列に加える) をしても行列式の値は変化しないという事を意味している。また行列式の定義の性質 (2) は列基本変形の 2 番目の変形 (ある列と別の列の入れ換え) をすると符号が変わる事を意味している。更に行列式の定義の性質 (1)–2) は列基本変形の番目の変形 (ある列を何倍かする，ただし 0 倍は行わない) をすると行列式も何倍かされる事を意味している。

基本変形には行基本変形と列基本変形があった。列基本変形と行列式の間には前述の様な関係があるが，行基本変形に関してはどうであろう。

同様の関係が成立する事が示されるが，これをもう一度列の場合と同じように証明するのは面倒臭いので次の定理を用意する。

定理 4.7

$$\det(A^T) = \det(A)$$

略証　ここでは後で証明する定理 4.13 を用いる[(3)]。$M = \left\{ A \in M(n; \boldsymbol{K}) \,\middle|\, \det A^T = \det A \right\}$ とおく。$M = M(n; \boldsymbol{K})$ を示せばよい。$M \subseteq M(n; \boldsymbol{K})$ は明らかなので $M \supseteq M(n; \boldsymbol{K})$ を示す。

最初に $A, B \in M$ ならば $AB \in M$ を示す。定理 4.13 より $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成立している。$A, B \in M$ のとき $\det(A^T) = \det(A), \det(B^T) = \det(B)$ である。このとき $\det((AB)^T) = \det(B^TA^T) = \det(B^T)\det(A^T) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(AB)$ なので $AB \in M$ が分かる。

[(3)]定理 4.13 の証明にここで証明した定理及びその帰結を用いなければ順序の逆転は許される。

基本行列は M に属する。また標準型の行列も M に属する。命題 3.5 より任意の n 次行列 A は基本行列 $P_1,\ldots,P_t$ と $Q_1,\ldots,Q_s$ 及び標準型の行列 H を用いて $A=P_1\cdots P_tHQ_1\cdots Q_s$ と書ける。上に示した事から $P_1P_2\in M$ が分かる。以下同様に $P_1P_2\cdots P_t\in M$ が分かる。$Q_1\cdots Q_s\in M$ かつ $H\in M$ なので $A=P_1\cdots P_tHQ_1\cdots Q_s\in M$ が得られる。 ∎

転置行列ではもとの行列の列は行に，行は列に変わるので定理 4.7 を用いると命題 4.4 及び 4.5 は次の形になる。

命題 4.8

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & \cdots & a_{jn}+\alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命題 4.9

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

定義 4.3 で行列式を定義したが，この様なものが実際に存在する事を証明する必要がある。一般には条件が相矛盾するものであると存在しないという場合もあるからである。存在について簡単にふれるが，証明等の細かいところはテキスト 3 章 §1–2 参照の事。

n を自然数とする。集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ を N と書く事にする。N から N への 1 対 1 写像全体の集合を S_n と書き n 次対称群という。また S_n の元を置換という。S_n には合成写像で積を定義する事ができる。S_n の元 σ で，ある 2 つの自然数 i,j に対しては $\sigma(i)=j$,$\sigma(j)=i$ となり，他の自然数は固定するものを ($k\neq i,j$ なら $\sigma(k)=k$) 互換と呼ぶ。この時次が成立する。

定理 4.10 任意の置換は何個かの互換の積として表わされる。この時互換の個数が偶数であるか，奇数であるかは表わし方によらない。

置換 σ が偶数個の互換の積で表わされる時偶置換，奇数個の積で表わされる時奇置換という。記号 sgn を σ が偶置換の時 $+1(\operatorname{sgn}\sigma=1)$，奇置換の時 $-1(\operatorname{sgn}\sigma=-1)$ で定義する。
演習問題 4.5　テキストを参考にして定理 4.10 を証明せよ。

以上の準備の元で行列式は次の様に定義される。

定義 4.11 $A=(a_{ij})\in M(n\,;\boldsymbol{K})$ に対し

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし和において σ はすべての置換を動く。

$n=2$ の場合具体的に書いてみよう。S_2 の元は $\{1,2\}$ から $\{1,2\}$ への 1 対 1 写像なので 2 つ存在する。σ_1 を $\sigma_1(1)=1$,$\sigma_1(2)=2$ とし，σ_2 を $\sigma_2(1)=2$,$\sigma_2(2)=1$ とする。$\operatorname{sgn}\sigma_1=1$,$\operatorname{sgn}\sigma_2=-1$ である。

$$\det(A)=\operatorname{sgn}\sigma_1 a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}+\operatorname{sgn}\sigma_2 a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

と具体的に書き下せる。
演習問題 4.6　$n=3$ の場合定義 4.11 を具体的に書き下せ。
演習問題 4.7　ここで定義した $\det(A)$ が定義 4.3 の (1) 多重線型性,(2) 交代性,(3) 単位の値を満たす事を示せ (テキスト参照の事)。